まえがき

一般相対性理論のテキストは数多くありますが，Dirac のものはそのミニマムエッセンスをスモールステップでまとめていて，無駄を省いた簡明さに特徴があります。その圧縮された表現のゆえに読み解いていくのも決して簡単ではありませんが，一般相対性理論を本格的に学ぼうとするのならば，どんなテキストでも読み進めるのにはそれなりの「執念」が必要なものです。私も一度挫折して放っておいた Dirac を，他の何冊かのテキストで独習した後に再度手にして何とか読めるようになったのですが，改めてその簡明さに感心しました。

決して厚いとはいえない Dirac のテキストには，必要にして最小限の内容がコンパクトにおさまっています。力のある人ならば，Dirac 自身のまえがきにもあるように,「最小の時間と労力でもって，一般相対性理論のもっともわかりにくいところを突破し，興味のわいた問題の専門的な研究にはいってゆくことができるようになる」ことでしょう。ゼミなどで使うには手ごろなねだんと厚さかもしれません。しかし，初めて本格的な一般相対性理論の学習にとりくもうとする人には，ちょっと手助けがほしくなるところがかなりあります。

本書は Dirac の「一般相対性理論」（江沢　洋訳，東京図書）を私が四苦八苦して学んだ跡をそのまま解説書としてまとめたものです。経験上人に教えようとするときに自分の理解も最も深まるものです。この作業を自ら課すことで，学習のはずみをつけようかなと都合のいいことを考えて書き始めて，何度かつまづきながらも何とか完結を見ることができました。正直のところ私自身「読破した」とはいいきれず，Dirac 書の簡明さを台無しにしてはいないかとの不安もありますが，いつかどこかでテンソル解析とリーマン幾何学の高い障壁を前に，挫折しそうになっている人たちに対してちょっとした手助けにでもなればと思っています。

高橋　善樹

2007 年 1 月 24 日

目 次

1　特殊相対性理論

1.1　時空座標

座標変換において，時間と空間座標が入り混じることが相対性理論の特徴です。運動の記述において，ニュートン力学では $x = x(t)$ のように常に独立変数としてあつかわれた時間が，相対性理論においてはその特権的地位をゆずって，空間座標と同等のものとしてあつかわれることになります。

$$x = (x^\mu) = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

とおくことは，このあとの 4 次元のベクトル・テンソルの表現において欠かせない記法です。$x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ とまとめることで座標の 4 つの成分を同時に表現し，これが時空における点，すなわち「事象」を表すことになります。また，添字の ”バランス ”は反変成分・共変成分の縮約という手続きにおけるバランスを意味していますが，これはテンソルのあつかいを理解することでいずれ明らかになるでしょう。

時間座標 $x^0 = t$ と空間座標 $(x^i) = (x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3)$ を同等にあつかうためには，その単位を一致させなければなりません。すべてを長さとして表現するなら，光速 c により $x^0 = ct$ とするべきですが，光速を 1 とする単位系をとることで文字数を節約しています。この単位系はたとえば次のようなものです。

時間：[秒]
長さ：[光秒] ＝光が真空中で 1 [s] 間に進む距離＝ c [m]

または，

時間：[光進時メートル] ＝光が 1 [m] を進む時間＝ c^{-1} [s]
長さ：[メートル]

いずれも実用的な単位ではないので，具体的な適用の際には c を補ってやればよいでしょう。

1.2　ベクトルと座標の計量

3次元空間におけるベクトルは，$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ のように3つの座標成分をもつ量として考えられますが，3次元ベクトルの最も基本的な例が変位ベクトル $d\boldsymbol{x} = (dx, dy, dz)$ です。もちろん変位は一般に d のついた微小量である必要はないのですが，一般相対性理論においては特に「曲がった」時空における記述をしなければならないという要請から，ある時空点における変位がその時空点に付随した物理量とどう関係しているかを記述する上では，微小量のみが意味をなすことになります。一般相対性理論の簡明な表現が微分形であるのは，いわば必然的な要請によるものです。

さて，ベクトルのさらに本質的な定義は，空間における長さが座標変換において不変であるという点に求められます。三平方の定理が成り立つ3次元ユークリッド空間においては，変位の大きさ ds は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

と書くことができますが，これは始点と終点の間の距離を表し，座標系の平行移動や回転といった変換において変わることがない不変量（スカラー）です。同様にベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ において，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} &= a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} &= b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

はそれぞれ，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の大きさ2乗あるいはスカラー積（内積）という不変量を表します。

同様にして，特殊相対性理論であつかう時空（平坦な，いわゆるミンコフスキー時空）における変位の大きさ ds は，

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

であるとし，これを不変量として保つ変換がローレンツ変換であるというわけです。この形式を時空の計量といいます。計量を

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

とする形式もありますが，符号を $(+,-,-,-)$ にするか $(-,+,+,+)$ にするかは統一されていればどちらでもよく，それぞれ一長一短あるようです。たとえば，前者は s が固有時に一致する点，後者は 3 次元ユークリッド空間の距離との類推が容易な点などが長所としてあげられますね。

1.3　反変ベクトル・共変ベクトル

さて，3 次元空間と同様に，4 次元時空におけるベクトル（4 元ベクトル）を考えます。座標変換において dx^μ と同じ変換をするのが反変ベクトル A^μ で，その大きさは

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A, A)$$

の平方根で与えられるとします。(A, A) は内積であり，3 次元空間の $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ に相当します。

A^μ に対して添字を下げたベクトルを

$$(A_\mu) = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$$

で定義して，これを共変ベクトルといいます。しかし，この 2 つは同じベクトル A の 2 種類の成分とみることができて，その意味では A^μ を反変成分，A_μ を共変成分ともいいます。共変成分の意味はとりあえず，

$$(A, A) = A^\mu A_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu A_\mu$$

$$(A, B) = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu B^\mu$$

という簡明な表記のためにあると考えてさしつかえありません。上下の同じ添字がひとつの項にあらわれたら，4 つの成分にわたって和をとるという約束は，アインシュタインの規約と呼ばれ，テンソルの計算において和をとる記号 Σ を省略し，大変すっきりした表記を可能にします。

1.4　テンソルと縮約

座標変換にともなって，2 つの反変ベクトル A^μ，B^μ の成分の積からなる，16 成分の量 $A^\mu B^\nu$ と同じ変換を受ける量 $T^{\mu\nu}$ が，2 階の反変テンソルです。ちなみに，テンソル $A^\mu B^\nu$ は A^μ と B^μ の外積とも呼ぶということですが，3 次元ベクトルのベクトル積を外積ということもあるので，混同しないようにしましょう。ベクトル積（$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$）に対してテンソル積（$A \otimes B$）あるいは直積と呼ぶこともあります。

同様にして 2 階の共変テンソル，混合テンソル，さらに高階のテンソルが定義されます。スカラーは 0 階のテンソルで成分は 1 個，ベクトルは 1 階のテンソルで成分は 4 個です。n 階のテンソルは 4^n 個の成分をもつ量になり，一般の高階テンソルを成分で書き下ろすことは大変です。しかし，2 階テンソルは行列で表示することが可能です。

$$\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 & B^1 & B^2 & B^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^0B^0 & A^0B^1 & A^0B^2 & A^0B^3 \\ A^1B^0 & A^1B^1 & A^1B^2 & A^1B^3 \\ A^2B^0 & A^2B^1 & A^2B^2 & A^2B^3 \\ A^3B^0 & A^3B^1 & A^3B^2 & A^3B^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

混合テンソルの上下の添字をそろえて和をとると，テンソルの階数が 2 だけ下がります。この操作を縮約といいます。縮約は上下の添字についてのみ許されます。そうすることで自動的に，縮約後の量がまたテンソルに

なることが保証されるのです。

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\mu} &= T^0{}_0 + T^1{}_1 + T^2{}_2 + T^3{}_3 \\ T^{\mu}{}_{\rho} U^{\rho}{}_{\nu} &= T^{\mu}{}_0 U^0{}_{\nu} + T^{\mu}{}_1 U^1{}_{\nu} + T^{\mu}{}_2 U^2{}_{\nu} + T^{\mu}{}_3 U^3{}_{\nu} \end{aligned}$$

1 番目の例では 2 階混合テンソルの縮約でスカラーになり，2 番目の例では 2 階混合テンソルの積（4 階混合テンソル）の縮約で 2 階混合テンソルを生成しています。後者は，行列表示では行列 T（前の T とは成分が異なります）と U の積となります。ちなみに，添字の上げ下げは特殊相対性理論の範囲では反変ベクトルと共変ベクトルの関係と同様に成分の符号を変えるだけで，例えば，$T^0{}_1 = T_{01} = -T_0{}^1 = -T^{01}$ などとなります。

1.5　テンソル方程式

ニュートン力学の法則がベクトル方程式であることは，空間の一様・等方性を前提として，法則が平行移動や回転といった座標変換に対して不変であることを自動的に表現しています。同様に，相対性理論による法則の表現はテンソル方程式であることが要請されます。そうすることによって，法則が時空の座標変換（特殊相対性理論の範囲ではローレンツ変換）に対して形を変えない（共変的である）ことが自動的に保証されるのです。

テンソル方程式の基本として，粒子（質点）の運動方程式を与えておきましょう。ニュートン力学の形式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

を書き換えることを考えます。まず，

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = mc\frac{d\boldsymbol{x}}{dx^0}$$

はこのままではテンソル（4 元ベクトル）の空間成分とはなりえません。$d\boldsymbol{x}$ は 4 元変位の空間成分なのですが，それを dx^0 で割っていることに問

題があるのです。そこで dx^0 をミンコフスキー時空のスカラー（0 階テンソル）である固有時の経過 $d\tau$（テキストの時空距離 ds と同じものですが，ニュートン力学との間の類推を容易にするためにあえて $d\tau$ を使いましょう）に置き換えます。時間成分も加えて

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

とすれば 4 元ベクトル（1 階テンソル）となります。これを 4 元速度といいます。ミンコフスキー時空での成分は，

$$(u^\mu) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}) \qquad \text{ただし，} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\boldsymbol{v}}{c}$$

となります。ここでは混乱を避けるために c を補いました。

さて，ここを突破すればテンソル方程式までは一直線です。まず，4 元速度を用いて 4 元運動量

$$p^\mu \equiv m_0 c u^\mu$$

が定義され，これをさらに τ で微分して

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

とすれば，テンソル方程式（4 元ベクトル方程式）のできあがり。結果的に右辺の 4 元力の空間成分は，ミンコフスキー時空では $\gamma\boldsymbol{f}/c$ に一致します。

4 元ベクトル・テンソルやそれらの方程式の形式は，平坦なミンコフスキー時空に限らず，曲がった時空においても多少の変更を経て引き継がれます。特殊相対性理論による力学，電気力学を復習しておきたいところですね。

練習問題

1-1　時空距離 ds が光速を 1 とする単位系において固有時の経過

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

に一致し，また，4 元速度の成分が

$$(u^\mu) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta})$$

となることを示せ。

1-2　4 元運動量 $(p^\mu) = (E/c, \boldsymbol{p})$ が時空のベクトルであることを示し，$p^\mu p_\mu$ がスカラーとなることから，粒子のエネルギーに関する公式

$$E = \sqrt{{E_0}^2 + \boldsymbol{p}^2 c^2} \qquad (E_0\text{は静止エネルギー})$$

を導け。

ヒント：$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2, \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \gamma m_0 \boldsymbol{v}$

1-3　電磁場を表すテンソルは，行列表記で

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。荷電粒子の運動方程式がこの電磁テンソルを用いて，

$$\frac{dp^\nu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

となることを確かめよ。

※　上記の電磁テンソルは 23 節で定義されるものと符号が逆だが，この定義も一般に多く用いられている。

2　斜交軸

2.1　斜交軸の計量

一般座標の計量やベクトルのあつかいを，斜交軸において考察しておこうというのが本節の主旨ですが，本文には斜交軸に即した具体化は何らなされておらず，すべてはそのまま一般座標に引き継がれる内容となっています。まず計量の一般的な形式は，

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

となります。ds は「距離」ですから，その 2 乗は変位の成分についての 2 次形式で表されるであろうということです。その係数 $g_{\mu\nu}$ は，一般には位置 x^μ の関数ですが，ユークリッド空間やミンコフスキー時空の場合のように「平坦」な場合には，定数となります。また，$g_{\mu\nu}$ は，その定義において 2 階共変テンソルであることが示されています。なぜなら，2 つの反変ベクトル dx^μ との直積を 2 組の添字において縮約したものがスカラーすなわち 0 階のテンソルになっているからです。

ミンコフスキー時空の直交軸による計量テンソルは，行列表示で

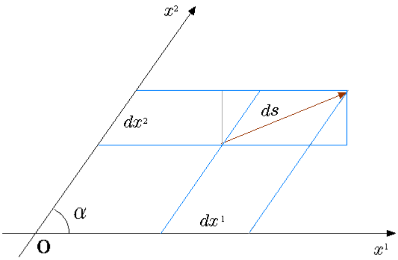
$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書けることはすぐにわかりますね。

計量テンソルは，2 つの添字の交換について対称で，いわゆる対称テンソルであるということにします。例えば，計量 ds^2 において $dx^1 dx^2$ の係数は $g_{12} + g_{21}$ となりますが，これはその座標系においてこの和が定まっていることを意味し，g_{12} と g_{21} にはその和を変えない範囲での任意性が

もともとあるわけです。したがってとりあえずここで決めた $g_{\mu\nu}$ の対称性は，とりあつかい上の便宜にすぎません。時空においては，対称性を認めた上で $g_{\mu\nu}$ の独立な成分は，行列表現における三角成分と対角成分の合計すなわち $(4^2-4)\div 2+4=10$ 個になります。

さて，最も簡単な具体例として，平坦な 2 次元平面上の斜交軸を考えましょう。x^1 軸に対して x^2 軸が反時計回りに α の角度をなしているとします。変位 dx^μ の長さ ds は，



$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (dx^1+dx^2\cos\alpha)^2+(dx^2\sin\alpha)^2\\
&= (dx^1)^2+2\cos\alpha\cdot dx^1dx^2+(dx^2)^2
\end{aligned}
$$

となりますから，計量テンソルは

$$
(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}1 & \cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{pmatrix}
$$

と書けます。

次に上の x^2 軸を x^0 軸に置き換えて，これがミンコフスキー時空上の斜交軸であるとすると，計量は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (dx^0\sin\alpha)^2-(dx^1+dx^0\cos\alpha)^2\\
&= (\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(dx^0)^2-2\cos\alpha\cdot dx^0dx^1-(dx^1)^2
\end{aligned}
$$

となりますから，計量テンソルは

$$
(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}\sin^2\alpha-\cos^2\alpha & -\cos\alpha\\ -\cos\alpha & -1\end{pmatrix}
$$

と書けることになります。このとき行列式の値は，

$$
g=|g_{\mu\nu}|=-\sin^2\alpha<0
$$

となり，g が負に保たれていることがわかります。

2.2　共変ベクトルと添字の上げ下げ

4 元ベクトル A の大きさ 2 乗が,

$$A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$$

となることから，共変ベクトルと反変ベクトルの関係は，計量テンソルによって

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$
$$A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu$$

と書けます。同時に，これが一般にテンソルの添字の上げ下げの規則にもなるわけです。$(g^{\mu\nu})$ と $(g_{\mu\nu})$ とは，互いに逆行列の関係になりますね。そこで,

$$(g_{\mu\nu})(g^{\nu\rho}) = (g_\mu^\rho)$$

は，単位行列になるわけです。g_μ^ρ はクロネッカーのデルタ δ_μ^ρ と同じです。$g_{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}$，g_ν^μ のいずれもテンソルであり，したがって添字の上げ下げによってお互いに移ることができます。

練習問題

2-1　2 次元ユークリッド空間（平面）上の斜交軸において，ベクトルの共変成分は 2 本の軸への正射影になることを示せ。

2-2　3 次元ユークリッド空間上で次のように決められた斜交軸において，計量テンソルを求めよ。

x^1 軸と x^2 軸が α の角をなす。
x^2 軸と x^3 軸が β の角をなす。
x^3 軸と x^1 軸が γ の角をなす。

3　曲線座標

3.1　微分と座標変換

微分の略記法として，コンマに下付き添字という最も簡略化された方法をとっていますが，他に $\partial_\mu Q$ などの記法もあります。添字が下につくことが場の量の変化 δQ で説明されていますが，下付き添字が共変成分を必ずしも意味していないことに注意しましょう。ユークリッド空間やミンコフスキー空間のように平坦な空間上の直線座標においては，座標による微分係数は共変ベクトルを構成します。例えば，3 次元空間のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} = A^\mu{}_{,\mu}$$

はスカラーとなりますから，微分演算子 ∇ は共変ベクトルとしてあつかわれます。しかし，後述されるように曲線座標においては，座標による微分係数は一般には共変成分を構成しません。これは，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ そのものが場の量として座標とともに変化することによるものです。

座標系 x^μ から別の座標系 $x^{\mu'}$ への座標変換は,

$$(x^{\mu'}{}_{,\nu}) = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\right)$$

すなわちヤコビの変換行列となります。逆変換は $(x^\lambda{}_{,\mu'})$ ですから,

$$x^\lambda{}_{,\mu'}\, x^{\mu'}{}_{,\nu} = g^\lambda_\nu$$

は当然ですね。

3.2　テンソルの変換

反変ベクトルは変位 δx と同じ変換 $(x^{\mu'}{}_{,\nu})$ に従いますが，$A^\mu B_\mu$ がスカラーであることから，共変ベクトルが逆変換 $(x^{\lambda}{}_{,\mu'})$ に従うことが説明されています。そして一般のテンソルの変換例として，

$$T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'} = x^{\alpha'}{}_{,\lambda}\, x^{\beta'}{}_{,\mu}\, x^{\nu}{}_{,\gamma'}\, T^{\lambda\mu}{}_{\nu}$$

のようになるということですが，説明されているように，ここはもう機械的に添字のバランスをとってやればいいわけです。

ここでテンソルの対称性，反対称性が変換において保たれることが述べられていますが，一応確認しておきましょう。$T^{\nu\mu} = \pm T^{\mu\nu}$ のとき，

$$\begin{aligned} T^{\beta'\alpha'} &= x^{\beta'}{}_{,\nu}\, x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, T^{\nu\mu} \\ &= \pm x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\beta'}{}_{,\nu}\, T^{\mu\nu} \\ &= \pm T^{\alpha'\beta'} \quad \text{（複号同順）} \end{aligned}$$

また，$g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}, g^{\mu}_{\nu}$ がテンソルであることも確認されていますね。計量テンソルは，基本テンソルとも呼ばれています。そして，一般にテンソルの微分係数はテンソルを構成しないのですが，スカラー場の微分に限って共変ベクトル場を構成するということが確認されています。このへんのことは，共変微分（10 節）で出てきますので，そちらで再度きちんと学ぶことにしましょう。

3.3　球座標の計量

曲線座標の例として，ユークリッド空間上の球座標について考察してみましょう。$x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$ とするときその計量は，

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2 \\ &= (dx^1)^2 + r^2(dx^2)^2 + r^2\sin^2\theta(dx^3)^2 \end{aligned}$$

となって，基本テンソルが

$$
\begin{aligned}
\mathsf{G}=(g_{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2\sin^2(x^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

のように，定数でなく座標の関数になることが直線座標との違いです。

さて，この球座標において反変ベクトルの成分 A^i は $dr, d\theta, d\varphi$ と同じ変換を受けるべきであり，したがって

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2 &= A_r^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2 \\
&= (A^1)^2 + r^2(A^2)^2 + r^2\sin^2\theta(A^3)^2
\end{aligned}
$$

となるべきです。すなわち反変成分は，r, θ, φ 方向への射影である A_r, A_θ, A_φ をそれぞれ $1, r, r\sin\theta$ で割ったものになるわけです。

練習問題

3-1　球座標 $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \varphi)$ において，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の共変成分 A_i と r, θ, φ 方向への射影 A_r, A_θ, A_φ との関係を示せ。

3-2　半径 R の球面上の位置を表す 2 次元座標として，地球の場合と同じく緯度 θ と経度 ϕ をとるとき，この座標の計量を求め，球面上の接ベクトル $\boldsymbol{A}$ の反変成分と共変成分を $\boldsymbol{A}$ の経線・緯線への射影 A_θ，A_ϕ で表せ。

4　似非テンソル

4.1　似非テンソル

テンソルのような添字をもち，すなわち添字数 n に対して 4^n 個の成分をもつ量でありながら，座標変換に際してテンソルの変換に従わないものが，似非テンソルです。一般相対性理論の基本において現れる似非テンソルは，微分によって現れる下つき添字が原因となって生じるものです。前述したとおり，テンソルの座標による微分係数は一般にテンソルとならないのです。しかし，添字の上げ下げや縮約の操作自体は座標変換と直接無関係なので，テンソルと同様の手続きで行うことができるわけです。ただし，微分の下付き添字（コンマつき！）については，

$$g^{\alpha\mu}A_{\mu,\nu} = A^{\alpha}{}_{,\nu}$$

などのうっかりミスに注意しましょう。右辺は $(g^{\alpha\mu}A_{\mu})_{,\nu}$ であって，計量テンソルが座標の関数である一般の場合に，それを微分の外にくくり出すことはできません。一般相対性理論で現れる似非テンソルの代表格として，クリストッフェル記号 $\Gamma_{\mu\nu\sigma}, \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ があげられますが，これは計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の座標微分によってつくられます。

4.2　商の定理

要するに，縮約してテンソルになるものはテンソルであるということになります。また，逆も真で，テンソルの縮約はテンソルであるということになりますね。実はこの定理は，すでに以前に使ってしまっていますが，どこだかわかりますか？　ていねいに証明すれば，本文のようになるわけですが，特に説明はいりませんね。

5　曲がった空間

5.1　リーマン空間

ユークリッド空間は，三平方の定理が成り立つ，いわば平らな空間です。例えば 2 次元平面は，2 次元ユークリッド空間です。一方，球面上の直角三角形において，三平方の定理は成り立ちません。球面は曲がった 2 次元リーマン空間です。さらに「曲がった」空間を一般に n 次元空間に拡張して，n 次元のリーマン空間というわけです。

n 次元空間が曲がっていることを直接見るためには，$(n+1)$ 次元ユークリッド空間に埋め込んで見ればいいのです。しかし，曲がっていることを確かめるには例えば三平方の定理が成り立っていないことを示せば十分です。

球面上にはいつくばって住むアメーバは，自分が住む空間が平らであると思い込んで生活しているかもしれませんが，いったん次元の高い 3 次元空間に埋め込んだ自分の「宇宙」を認識できれば，曲がっていることを直接見ることができます。しかし，曲がっていることを確かめるには例えば，ぐるっと円を描いて歩いた自分の軌跡（円周）の長さをその半径で割ってみたとき，その結果が 2π よりわずかに小さいことが示せればいいのです。2 次元アメーバがやがて文明を築いて，自分の「宇宙」を旅行できる高速移動体を発明して，どこまでもまっすぐ突っ走った結末として，スタート地点に逆方向からもどることになり，自分の「宇宙」が曲がって閉じていることを知るかもしれません。

だいぶ脱線しましたが，私たちは曲がったリーマン空間を考察する上で，上記と同じような手順を踏んでいきます。まず高次元ユークリッド空間に埋め込んだリーマン空間を考えることから始めます。しばし，高次元からながめた上で，あらためて本来の自分の「宇宙」であるリーマン空間に降り立って，高次元空間を使わずにその曲がり具合を認識する道具をそろえようというわけです。

5.2　曲がった時空の計量

重力の存在を時空の曲がりに置き換えるという発想が，アインシュタインの重力理論すなわち一般相対性理論の基礎となっています。曲がった時空の曲線座標による計量は，これまでと同様に

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

で与えられ，基本テンソルがまさに重力場の形を与えるものであるとするのです。

$ds^2 > 0$　すなわち　ds が実数のとき，時間的
$ds^2 < 0$　すなわち　ds が虚数のとき，空間的

であるといいます。ミンコフスキー計量と同様に，$(-, +, +, +)$ を符号とする選択では，上記の関係は逆になります。時間的へだたりにある 2 事象は，光速未満の粒子の世界線によってつなぐことができます。すなわち，時間的に因果性をもつことのできる 2 事象であることを示します。一方，空間的へだたりにある 2 事象は，1 つの粒子の世界線でつなぐことはできず，時間的な因果を構成することが不可能であるということになります。逆に，微小な空間的へだたりにおいては，それらの 2 事象を同時とみなすことのできる局所系が存在することになります。

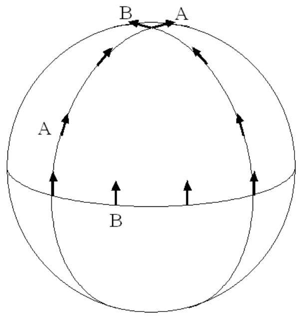
6　平行移動

6.1　曲がった空間における平行移動

例えば球面上に 2 本の平行な「直線」を引こうとしても，平行の意味がどこまで延長しても決して交わらないというものであるならば，2 次元アメーバにとってはそれは曲線とならざるをえません。われわれの地球においても，決して交わらない緯線は，それぞれの曲率で曲がっています。北緯 89 度 59 分をつなぐ緯線は，北極点を中心とした小さな円になりますよね。一方アメーバにとっての直線である大円どうしは，局所的に平行に見えても必ずどこかで交わってしまいます。赤道上で平行な子午線は，北極と南極で交わることになりますね。曲がった空間においては，平行で交わらない「直線」は存在せず，平行の概念そのものが局所的な意味に限定されることがわかると思います。

ここでいうベクトルの平行移動も，当然局所的な平行移動の積み重ねとして定義されます。したがって，その結果は移動の経路に依存することになります。例えば赤道上を出発した 2 次元アメーバ A が，北（前）を向いてまっすぐ 1m 北上して，北極に到着したとします。

一方同じところを出発した別のアメーバ B は，北（左）を向きながら 1m 東に移動して，それから同様に北（前）を向いたまま 1m 北上して北極に到着します。どちらも北を向いたまま，いわば自分自身に平行に移動したわけですが，北極に到着した 2 匹のアメーバは互いに 90 度の角をなして，別の方向（方角は同じ南ですが）を向いて出会うことになるでしょう。さらに B が A のやってきた経路を逆にたどって平行移動すると，出発点に西を向いてもどることになります。



6.2　高次元空間への埋め込み

平行移動の概念は，曲がった時空上でのテンソル場の変化を考えるうえで必要になります。そこでひとまず平行移動によるベクトルの変化を数学的に記述する道具を調達するにあたって，高次元の平坦な空間にとびだして，そこに埋め込まれたリーマン空間を「外から」ながめてみます。このとき平行移動はまさに本来の平行の意味によって実行されることになります。ただし，そのままではリーマン空間から遊離してしまうことになります。ベクトルはもともとリーマン空間にはりついたものとして定義されているのですから，リーマン空間内の平行移動としては，はみ出したベクトルを射影をとって引き戻してやる必要があります。この無限小操作の積み重ねとしてリーマン空間内の平行移動が実現するわけです。

まず，高次元空間の計量が

$$ds^2 = h_{mn} dz^n dz^m$$

で与えられるとしていますが，空間が平坦であれば h_{nm} を位置によって変わらない定数にとることが可能です。リーマン空間として時空を考える場合は，もともと平坦なミンコフスキー時空自体がユークリッド空間ではなく，直交軸の場合でも特殊な計量をもつ擬似的なものですから，それを埋め込む高次元空間の座標軸も直線性さえ確保されていれば十分です。また，一般に埋め込む先の平坦な空間を N 次元としていますが，もちろん最低 $N = 5$ であればいいことはいうまでもないことですね。

4 次元時空上の位置（事象の座標）x^μ に対応する平坦な N 次元空間における座標 $y^n(x)$ は，1 対 1 対応で常に x^μ によって微分可能であるとします。そこで 4 次元曲面（時空）上の微小距離 δs は

$$\begin{aligned}
\delta s^2 &= h_{nm} \delta y^n \delta y^m \\
&= h_{nm} y^n{}_{,\mu}\, y^m{}_{,\nu}\, \delta x^\mu \delta x^\nu \\
&= y^n{}_{,\mu}\, y_{n,\nu}\, \delta x^\mu \delta x^\nu
\end{aligned}$$

となるわけですが，ここでは h_{nm} が定数であることから，

$$h_{nm} y^m{}_{,\nu} = (h_{nm} y^m)_{,\nu} = y_{n,\nu}$$

となることに注意しましょう。

以上の結果,

$$g_{\mu\nu} = y^n{}_{,\mu}\, y_{n,\nu}$$

となり，これが 4 次元リーマン空間である時空を平坦な高次元空間に埋め込んで見下ろした際の，いわゆる曲がりを表現していると考えてよいでしょう。

6.3 平行移動によるベクトルの変化

さて，いよいよ時空上のベクトルの平行移動を考えます。

$$A^n = y^n{}_{,\mu}\, A^\mu$$

は，ベクトル A の時空座標から N 次元空間座標への変換で，時空曲面にはりついたベクトルを高次元にとびだして見たものということです。曲面上の局所座標 x^μ 軸の基底を e_μ と書けば,

$$A = A^\mu e_\mu$$

となりますから，上と比べると $y^n{}_{,\mu}$ は e_μ の N 次元座標による成分を表していることを指摘しておきましょう。その意味から $y^n{}_{,\mu}$ はそのまま接ベクトルまたは基底とも呼ばれます。

さて，このベクトル A を時空曲面上で平行移動するわけですが，前述のように N 次元空間で平行移動すると曲面からのはみだしが生じるので,曲面上に射影して引き戻すという操作をします。そうすることによって,曲がった時空の上に住みその曲がりを局所的には認識できないわれわれにとっては，長さと方向を保ちながら移動したと見えるわけです。ベクトル A は，本来時空上で定義されたものですから，移動によって生じたはみだしすなわち時空曲面に対する法線方向の成分には，直接の物理的な意味がないということですね。

本文では射影して引き戻した成分を K^μ としていますが，最終的にこれが平行移動した結果ですからその意味で普通の表現を使えば，

$$\begin{aligned} A^n y_{n},_{\nu}(x+dx) &= A^\mu(x+dx) y^n,_\mu(x+dx) y_n,_\nu(x+dx) \\ &= A^\mu(x+dx) g_{\mu\nu}(x+dx) \\ &= A_\nu(x+dx) \end{aligned}$$

となります。なお，A^n はとりあえず大きさと方向を変えない平行移動をしているわけなので，$A^n(x+dx) = A^n(x)$ ですが，接ベクトルとの内積をとることで法線成分をおとし，時空曲面への射影をとっています。ところで繰り返しになりますが，$y_{n,\mu}$ が $y^n,_\mu$ に対する共変成分であることは，h_{nm} が定数であることによっています。すなわち

$$h_{nm} y^n,_\mu = (h_{nm} y^n),_\mu = y_m,_\mu \quad .$$

一方左辺は１次までの展開により，

$$A^n y_n,_\nu(x+dx) = A_\nu + A^\mu y^n,_\mu y_n,_\nu,_\sigma dx^\sigma$$

となることから，比較により

$$A_\nu(x+dx) = A_\nu(x) + dA_\nu = A_\nu + A^\mu y^n,_\mu y_n,_\nu,_\sigma dx^\sigma$$

すなわち

$$dA_\nu = A^\mu y^n,_\mu y_n,_\nu,_\sigma dx^\sigma$$

が平行移動による A_ν の変化になるというわけです。

7　クリストッフェル記号

7.1　曲がった時空の自己完結的記述

（6.3）式

$$g_{\mu\nu} = y^n{}_{,\mu}\, y_n{}_{,\nu}$$

の関係から，平行移動によるベクトルの変化を表す（6.7）式

$$dA_\nu = A^\mu y^n{}_{,\mu}\, y_n{}_{,\nu}{}_{,\sigma}\, dx^\sigma$$

は時空の基本テンソル $g_{\mu\nu}$ のみで書くことができそうですが，実際それが可能です。実はこの書き換えは大変重要な意味を持っています。私たちは時空の曲がりを見るために，ひとまず高次元の平坦な空間にとびだして，平行移動によるベクトルの変化をその高次元空間の座標を通して（6.7）のように表現したのです。しかし，基本テンソルはそれ自体が場の量であり，本来時空曲面上の位置のみの関数として表現できるはずですから，高次元空間は直接には不要です。したがって上の書き換えは高次元空間をひきあいに出すことなく，時空上の場の量の変化を自己完結的に記述することを意味するのです。事実，平坦な高次元空間は曲がった時空をひとまず埋め込んで考察するための抽象的な道具に過ぎません。時空の自己完結的記述は，一般相対性理論を現実と照らし合わせるために必要不可欠なものといえます。私たちはいわば 4 次元時空曲面上にはりついたアメーバであり，それを埋め込んだ 5 次元空間など直接認識することは不可能だからです。

さて,（6.7）式の書き換えは本文の展開で明らかです。なお，くどいようですが添字 n の上げ下げの任意性については，例えば次のとおりです。

$$\begin{aligned} y^n{}_{,\mu\sigma}\, y_n{}_{,\nu} &= y^n{}_{,\mu\sigma}\, (h_{mn} y^m)_{,\nu} \\ &= y^n{}_{,\mu\sigma}\, h_{mn} y^m{}_{,\nu} \\ &= (h_{mn} y^n)_{,\mu\sigma}\, y^m{}_{,\nu} \\ &= y_m{}_{,\mu\sigma}\, y^m{}_{,\nu} = y_n{}_{,\mu\sigma}\, y^n{}_{,\nu} \end{aligned}$$

7.2　クリストッフェル記号と平行移動の公式

以下の公式は，一般相対性理論の数学的記述の基本的な道具である，リーマン幾何学の基本公式となります。クリストッフェル記号は接続係数とも呼ばれ，曲がった空間上での平行移動によるベクトルの変化を，ベクトルの成分そのものと関係づける係数で，一般の n 次元多様体で n^3 個，4 次元時空では $4^3=64$ 個の成分をもつ似非テンソルです。

第 1 種クリストッフェル記号

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}=\frac{1}{2}(g_{\mu\nu},_{\sigma}+g_{\mu\sigma},_{\nu}-g_{\nu\sigma},_{\mu})$$

第 2 種クリストッフェル記号

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}=g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma}$$

平行移動によるベクトル成分の変化

$$\begin{aligned} dA_{\nu} &= \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}A_{\mu}dx^{\sigma} \\ dB^{\nu} &= -\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}B^{\mu}dx^{\sigma} \end{aligned}$$

練習問題

7-1　座標変換 $x^{\mu}\to x^{\alpha'}$ における第 1 種クリストッフェル記号の変換を導いて，テンソルの変換性を持たない似非テンソルであることを直接確かめよ。

7-2　半径 R の球面に対して，緯度 $x^1=\theta$，経度 $x^2=\phi$ を座標にとる場合，第 1 種および第 2 種のクリストッフェル記号を求めよ。また，球面上のベクトル

$$\boldsymbol{A}=(A^1,A^2)=\left(\frac{1}{R}A_{\theta},\frac{1}{R\sin\theta}A_{\phi}\right)$$

を緯度 θ の緯線に沿って変位

$$d\boldsymbol{x}=(dx^1,dx^2)=(0,d\phi)$$

だけ平行移動するとき，ベクトルの変化 $d\boldsymbol{A}$ を求めよ。

8　測地線

8.1　測地線＝曲がった時空上の「直線」

3 次元ユークリッド空間で，あるベクトル $\boldsymbol{v}$ をそのベクトルの方向に平行移動すると，当然直線を描くことになります。同様に，リーマン空間においてベクトルをその方向に平行移動したとき，そのベクトルが描く軌跡が測地線と呼ばれるものになるのです。したがって，高次元の平坦な空間への埋め込みを考えれば，曲がったリーマン空間の測地線はもちろん曲線になりますが，へばりついたアメーバの自己完結的な立場では，測地線は空間内でまっすぐに引いた線であるといえますね。最も簡単な 2 次元球面の例では，測地線はいわゆる大円となります。大円は球面世界で 2 点を結ぶ曲線の中で最も長さの短い線でもあります。

以上の理屈を曲がった 4 次元時空に適用することができます。ただし，時空の基本テンソルの成分は符号が特異なので注意を要します。測地線に沿うベクトルの大きさ 2 乗 $u^\mu u_\mu$ の符号によって，時空の測地線は次の 3 つに分類されます。

$u^\mu u_\mu$	$>$	0	のとき，時間的測地線	$\rightarrow$	自由粒子の世界線となる
$u^\mu u_\mu$	$=$	0	のとき，ゼロ・測地線	$\rightarrow$	光子の世界線となる
$u^\mu u_\mu$	$<$	0	のとき，空間的測地線		

ミンコフスキー時空における時間的ベクトルの場合，パラメータ τ を固有時（に光速をかけたもの）にとれば，

$$\begin{aligned} u^\mu u_\mu &= \left(c\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \\ &= \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \end{aligned}$$

となります。同様の操作を曲がった時空にも適用すれば，本文で言うように u^μ の「長さ」をつねに 1 とし，パラメタ τ を固有時に一致させること

ができるわけです。

空間的測地線の場合，ベクトルの大きさ 2 乗が負になりますから，測地線に沿う「長さ」あるいは積分を考えるとき，そのままでは虚数になってしまいますから注意が必要です。計量 ds^2 の絶対値をとってあらためて線素の長さ 2 乗と定義するなどの方法がとられます。これは計量の符号形式を $(-,+,+,+)$ と取り替えることと同等ですね。この場合に $\sqrt{|ds^2|}$ は，2 事象点を同時刻とするような局所慣性系における空間距離にあたります。

また，ゼロ・測地線の場合は $ds = 0$ となりますから，線素として ds をとる意味がなくなります。したがって，測地線方程式においても固有時とは異なるパラメータを用いることになるわけです。ところで，ゼロ・測地線の場合の $u^\mu u_\mu = 0$ は 3 次元空間のベクトルの場合とは違って $u^\mu = 0$ を意味してはいないことに注意しましょう。

8.2 自由粒子は時間的測地線を描く

重力のほかに力を受けない「自由粒子」の世界線は，時間的な測地線であるとする仮定は，一般相対性理論の土台にある計量仮説，すなわち重力場とその作用が時空の曲がりを表現する基本テンソルのみで記述できるということを，最も簡単な場合に適用して，より具体的に言い換えたものと考えることができます。ミンコフスキー時空において（重力を含めて一切の力を受けない）自由粒子がその世界線として直線を描くことは自明です。一方，時空の曲がりとして重力を記述する一般相対性理論においては，重力そのものは曲がった時空構造の中に包含されて，力としてあらためて考える必要がなくなります。そこで自由粒子は，時空の中での測地線すなわち「まっすぐ」な世界線を描くということになるのです。

9　測地線の停留性

9.1　変分原理による測地線方程式の導出

例えば，曲がった通常の 2 次元曲面における測地線は，曲面上の 2 点を曲面に沿って結ぶ曲線のうち最短（極小）のものとなります。同様のことが 4 次元時空の測地線にも成立するわけですが，ただ気をつけなければいけないことは，時空計量の符号の特異性から「極小」という条件は破棄せざるを得ないということです。実際，時間的測地線の場合にそれは極大をとることになります。そこでさらに一般化して，本文では「停留性」としているわけです。

さて，これまでも何度か困難をおぼえた人がいることと思いますが，4 次元時空間はある意味で擬似的な「空間」であり，事象間の「距離」や曲線の「長さ」といっても私たちが直感的に認識可能な 3 次元ユークリッド空間のものとはかなり異なる擬似的・抽象的な量ですから，それを常に意識しておく必要がありますね。4 次元時空を考察するとき，3 次元空間や 2 次元曲面との類推を用いて理解の助けにすることはもちろん大変有効ですが,「距離」や「長さ」といった概念に対して類推以上の具体性を期待すると，間違いのもとになりますから注意しましょう。

変分原理から測地線の方程式を導出する本文の展開で，ひとつだけ必要かもしれない補足をしておきます。

$$\begin{aligned}\delta\int_P^Q ds = \int_P^Q \delta(ds) &= \int_P^Q \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu},_\lambda\, v^\mu v^\nu \delta x^\lambda + g_{\mu\lambda}v^\mu \frac{d\delta x^\lambda}{ds}\right] ds \\ &= \int_P^Q \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu},_\lambda\, v^\mu v^\nu - \frac{d}{ds}(g_{\mu\lambda}v^\mu)\right]\delta x^\lambda ds.\end{aligned}$$

と，(9.1) 式を導出する過程ですが，１行目右辺の第 2 項は

$$\int_P^Q \left[g_{\mu\lambda}v^\mu \frac{d\delta x^\lambda}{ds}\right] ds = \Big[(g_{\mu\lambda}v^\mu \delta x^\lambda\Big]_P^Q - \int_P^Q \left[\frac{d}{ds}(g_{\mu\lambda}v^\mu)\delta x^\lambda\right] ds$$

と部分積分をした上で，結果の第 1 項が $\delta x^\lambda(P)=\delta x^\lambda(Q)=0$ によって消えるというものです。

最終的に測地線の停留性から変分法を使って測地線の方程式が得られていますが，解析力学で登場する最小作用の原理などで変分原理を知っている人は，この結果は一般的な作用積分

$$S=\int_{\tau_1}^{\tau_2}L(x^\mu,\dot{x}^\mu)d\tau$$

の停留性の条件であるオイラーの方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=0,\quad \dot{x}^\mu\equiv\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

において，$Ld\tau=ds$ として直接得ることもできることに思い当たるでしょう。ここで τ は一般に経路に沿ったパラメタで，最小作用の原理では時間 t をとります。

9.2 自由粒子の作用積分

測地線方程式は自由粒子の運動方程式にあたるものですから，時間的測地線の積分は係数をのぞいて自由粒子の作用積分に一致すると考えることができます。この作用積分はずうっと後の 27 節に登場しますが，測地線方程式と自由粒子の運動方程式の同一性に対する理解を深める上で有意義と思われるので，補足しておきましょう。上記の係数を k として

$$\int Ldt=k\int ds$$

とおいて，簡単のためミンコフスキー時空の場合を考えます。すると対応するラグランジアンは，

$$\begin{aligned}L=k\frac{ds}{dt} &= kc\sqrt{1-\beta^2}\\ &= kc-\frac{1}{2}kc\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\equiv\frac{v}{c}\end{aligned}$$

となります。ラグランジアンにおいて定数は無視できますから，はじめの kc は捨てて $\beta\to 0$ のニュートン近似で $L\to\frac{1}{2}mv^2$ と対応することを考慮すれば，$k=-mc$ を得ます。したがって，自由粒子の作用積分は

$$S_0=-mc\int ds$$

で与えられることになります。この作用積分は一般の時空に拡張することができて，自由粒子のラグランジアンは

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \qquad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$$

と書けます。S_0 の負号のために，前述したように作用積分 S_0 が極小となるとき，時間的測地線の「長さ」$\int ds$ は極大となることも確認できました。

練習問題

9-1　オイラーの方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

において，

$$L = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

とおくことにより，測地線の方程式が得られることを確かめよ。

9-2　パラメタ x^1, x^2 によってその上の座標が記述でき，その基本テンソルが $g_{\mu\nu}$ で与えられている 2 次元曲面がある。この曲面上に摩擦なしに拘束されていて，拘束力以外にいかなる外力も受けない粒子の軌道が曲面の測地線となることを，ミンコフスキー時空におけるラグランジアン

$$\begin{aligned} L &= -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\dot{y}^n \dot{y}_n} \\ &= -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \qquad \dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

を用いて示せ。ただし，y^n は 3 次元直交座標で，

$$\dot{y}^n \dot{y}_n = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$$

は速さ 2 乗である。

ヒント：　ラグランジュ方程式（オイラー方程式）が曲面上の測地線の方程式になることをいえばよい。

10　共変微分

10.1　平行移動と共変微分

共変微分の意義の理解へとせまるために，2 つの方向性があると思います。ひとつめは，テンソル量の変化をはかる基準をどこにおけばよいのかということからせまる方向，ふたつめは法則の記述にテンソル量が必要であることを認めた上で微分演算をどうテンソル化するかということからせまる方向です。

3 次元ユークリッド空間を舞台とするニュートン力学では，スカラーおよびベクトルを含む 3 次元テンソル量の位置的変化および時間的変化がテーマとなっています。一方，4 次元時空においては時間も空間座標と同等のあつかいを受け，全てを時空の幾何学として記述するために,「時間的変化」も時空内の場の変化として表されることになるのですね。そこでは,時空内の 4 次元テンソル量の変化が主要なテーマであることになります。

さて，曲がった時空におけるテンソルの変化を追う上で基本となるのは 4 元ベクトルの変化です。曲がった空間上の曲線座標が私たちの舞台になりますから，その上で定義されたベクトルの変化を正しく追うためには,成分の変化を追うだけでは十分でありません。なぜなら成分の基準をなす座標軸自体が曲がっているからです。私たちは座標軸方向の単位ベクトルすなわち基底の変化をも考慮しなければならないのです。そこで変化に対する基準となるのが平行移動の概念です。つまり，自身に対して平行移動されたベクトルからどれだけ変化したかを考えればよいということになります。したがって時空上で位置が dx だけ変化したとき，4 元ベクトル A_μ の実質的変化は

$$A_\mu(x+dx) - [A_\mu(x) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} A_\alpha dx^\nu] = (A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} A_\alpha) dx^\nu$$

となります。そこで A_μ の共変微分を

$$A_{\mu:\nu} \equiv A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} A_\alpha$$

と定義することになるのです。テンソル一般の共変微分は，本文にあるようにテンソル積の共変微分に対して，通常の積の微分に関する公式を拡張するだけで終わりです。

10.2　微分係数のテンソル化

さて，共変微分へのもうひとつの接近は，微分演算をいかにテンソル化するかということです。本文にあるように

$$\begin{aligned} A_{\mu',\nu'} &= (A_\rho x^\rho{}_{,\mu'})_{,\nu'} \\ &= A_{\rho,\sigma}\, x^\sigma{}_{,\nu'}\, x^\rho{}_{,\mu'} + A_\rho x^\rho{}_{,\mu'\nu'} \end{aligned}$$

の第 2 項の存在が座標による微分を似非テンソルにしています。そこで第 2 種クリストッフェル記号の変換

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = x^{\lambda'}{}_{,\alpha}\, x^\beta{}_{,\mu'}\, x^\gamma{}_{,\nu'}\, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + x^{\lambda'}{}_{,\sigma}\, x^\sigma{}_{,\mu'\nu'}$$

に $x^\rho{}_{,\lambda'}$ をかけて

$$x^\rho{}_{,\lambda'}\, \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = x^\beta{}_{,\mu'}\, x^\gamma{}_{,\nu'}\, \Gamma^\rho_{\beta\gamma} + x^\rho{}_{,\mu'\nu'}$$

とし，右辺の $x^\rho{}_{,\mu'\nu'}$ を微分した式の第 2 項に代入すれば，

$$\begin{aligned} A_{\mu',\nu'} &= A_{\rho,\sigma}\, x^\sigma{}_{,\nu'}\, x^\rho{}_{,\mu'} + A_\rho (x^\rho{}_{,\lambda'}\, \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} - x^\beta{}_{,\mu'}\, x^\gamma{}_{,\nu'}\, \Gamma^\rho_{\beta\gamma}) \\ &= A_{\rho,\sigma}\, x^\sigma{}_{,\nu'}\, x^\rho{}_{,\mu'} + A_{\lambda'} \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} - x^\beta{}_{,\mu'}\, x^\gamma{}_{,\nu'}\, \Gamma^\rho_{\beta\gamma} A_\rho . \end{aligned}$$

したがって，

$$A_{\mu',\nu'} - \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} A_{\lambda'} = x^\rho{}_{,\mu'}\, x^\sigma{}_{,\nu'}\, (A_{\rho,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} A_\alpha)$$

となって，テンソルとして変換する共変微分の形式が得られました。

なお，基本テンソル $g_{\mu\nu}$ が共変微分に対して「定数なみ」であることは重要です。曲がった空間で場の量（テンソル）の変化を記述するために準備されたのが共変微分ですから，空間の曲がりそのものを表現する基本テンソルが共変微分の演算を受けない（受けると 0 になる）ことは，つじつまが合っているように思えます。

10.3　時空の幾何学の数学的道具

さて，ここまでで私たちは，重力によって曲がった時空を舞台とする物理法則を記述するために必要な数学的道具を，ひととおりそろえたということができます。ニュートン力学との比較において整理してみると，次のようになるでしょうか。

ニュートン力学　→　物理法則は空間テンソルの微分方程式

舞　台　平坦な 3 次元空間
時間変化を問題にするとき時間は独立変数

物理量　3 次元テンソル（スカラー，ベクトルを含む）

微　分　空間変化→座標による微分
時間変化→時間による微分

一般相対性理論　→　物理法則は時空テンソルの微分方程式
＝　曲がった時空の幾何学

舞　台　曲がった 4 次元時空
時間変化は時空間上の変化に包含

物理量　4 次元テンソル（スカラー，ベクトルを含む）

微　分　時空座標による共変微分

スカラー場に対するダランベールの方程式は，ミンコフスキー時空では

$$\begin{aligned}\Box V &= \eta^{\mu\nu} V_{,\mu\nu} \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \triangle V = 0\end{aligned}$$

すなわち波動方程式となりますが，平坦な時空の基本テンソル $\eta^{\mu\nu}$ を $g^{\mu\nu}$ にとりかえて，微分を共変微分にすれば曲がった時空に拡張できるわけで

す。すなわち，

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}V_{:\mu:\nu} &= g^{\mu\nu}(V_{:\mu})_{:\nu} = g^{\mu\nu}(V_{,\mu})_{:\nu} \\ &= g^{\mu\nu}(V_{,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

とすればよいことになります。

ちなみに，スカラー場に対するダランベールの方程式の例としては，ローレンツゲージにおいて真空中のマックスウェル方程式の電場に関する 2 式をスカラーポテンシャル ϕ でひとつにまとめた

$$\Box\phi = 0$$

が代表的です。もちろん共変形は上と同じ形になります。

練習問題

10-1　第 1 種クリストッフェル記号の変換は，

$$\Gamma_{\alpha'\beta'\gamma'} = x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, \Gamma_{\mu\nu\sigma} + x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}\, g_{\mu\nu}$$

で与えられる（練習問題 **7-1** 参照）。添字をひとつ上げることにより，第 2 種クリストッフェル記号の変換を導け。

10-2　反変ベクトルの共変微分

$$A^{\mu}{}_{:\sigma} = A^{\mu}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}A^{\nu}$$

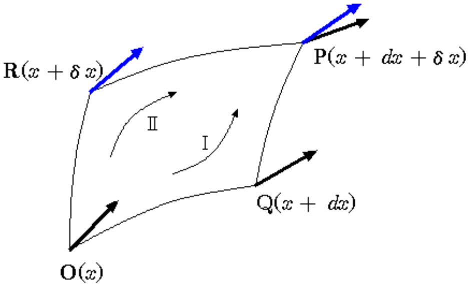
が，座標変換 $x^{\mu} \rightarrow x^{\alpha'}$ に対して 2 階の混合テンソルとして正しく変換することを確かめよ。

11　曲率テンソル

11.1　共変微分の非可換性

2 回連続した共変微分の結果が，微分の順序によって異なる原因は，共変微分と平行移動との関係に見出すことができます。

ベクトル場を共変微分するとき，変化の基準を平行移動したベクトルにおきましたが，平行移動の結果自体が移動の経路に依存して変わるために，連続した共変微分の結果は経路すなわち微分の順序によって異なることになるのです。



点 O(x) から点 P$(x + dx + \delta x)$ への平行移動をするとき，

経路 I：O$(x) \to$ Q$(x + dx) \to$ P$(x + dx + \delta x)$
経路 II：O$(x) \to$ R$(x + \delta x) \to$ P$(x + dx + \delta x)$

の二つの微小経路に沿って実行した結果を比べてみましょう。
まず，経路 I に沿った平行移動の結果は，2 次の微小量までとると次のようになります。

$$\begin{aligned} A_{\parallel\mu}(\mathrm{P{:}I}) &= A_{\parallel\mu}(\mathrm{Q}) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathrm{Q}) A_{\parallel\lambda}(\mathrm{Q})\delta x^{\nu} \\ &= A_{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda} dx^{\nu} + \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma} dx^{\sigma}\right)\left(A_{\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} A_{\alpha} dx^{\beta}\right)\delta x^{\nu} \\ &= A_{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda} dx^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda}\delta x^{\nu} + (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}) A_{\alpha} dx^{\beta}\delta x^{\nu} \end{aligned}$$

ただし，点 O における値を表す (O) は煩雑になるので省略しました。

一方，経路 II に沿った平行移動の結果は，dx と δx を交換して

$$\begin{aligned} &A_{\parallel\mu}(\mathrm{P{:}II}) \\ &= A_{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda}\delta x^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda} dx^{\nu} + (\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}) A_{\alpha} dx^{\beta}\delta x^{\nu} \end{aligned}$$

となります。そこで両者の差をとると，

$$A_{\parallel\mu}(\mathrm{P{:}I}) - A_{\parallel\mu}(\mathrm{P{:}II}) = R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} A_{\alpha} dx^{\beta} \delta x^{\nu}$$

という結果を得ます。これが共変微分の非可換性のもとになっているわけですね。

11.2　曲率テンソルの対称性

曲率テンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の対称性を列挙すれば，

(1)　(μ, ν) について反対称
(2)　(ρ, σ) について反対称
(3)　$(\mu\nu, \rho\sigma)$ について対称
(4)　(ν, ρ, σ) をサイクリックに置換したものの和が 0

となります。これにしたがって，独立な成分の個数を求めてみましょう。

(i)　添字がすべて同じ場合

4 成分ありますが，(1) または (2) によりすべて 0 です。

(ii)　添字が 3 つだけ同じ場合

$4 \times 3 \times 4 = 48$ 成分ありますが，これも前 2 つか後ろ 2 つのいずれかが必ず同じになりますから，(1) または (2) によりすべて 0 です。

(iii)　2 つ同じ添字が 2 組ある場合

$4 \times 3 \times 3 = 36$ 成分のうち，$4 \times 3 = 12$ 個は前 2 つ，後ろ 2 つが同じで 0。あとの 24 個は (1)(2)(3) により，2 つの添字○×について

$$R_{\bigcirc\times\bigcirc\times} = R_{\times\bigcirc\times\bigcirc} = -R_{\bigcirc\times\times\bigcirc} = -R_{\times\bigcirc\bigcirc\times}$$

の関係をもつため，独立な成分は 6 個となります。

(iv)　添字が 2 つだけ同じ場合

$4\times3\times2\times6=144$ 成分のうち，前 2 つまたは後ろ 2 つが同じものが $4\times3\times2\times2=48$ 個あって，これらはすべて 0。残り 96 個は (iii) と同様の関係から 8 成分ずつ関係する組をなしていて，独立な個数は 12 個になります。

(v)　添字が全部異なる場合

$4\times3\times2=24$ 成分ありますが，最初の添字が 0 のもの 6 つは $R_{0123}=-R_{0132}$ に対して

$$R_{0123}+R_{0231}+R_{0312}=0, \qquad R_{0132}+R_{0321}+R_{0213}=0$$

の 2 グループをなしており，独立なものは 2 個。また，この 2 個から (1)(2)(3) を用いた対称な置換で最初の添字が 1，2，3 のものに移ることができますから，結局独立な成分は 2 個だけです。

以上を合計すると，$4^4=256$ 成分のうち 0 でない独立な成分は

$$6+12+2=20\ 個$$

あることになります。

以上は，4 次元の曲率テンソルの一般的な定義から出てくる対称性によるものであり，さらに対象となる空間に例えば球対称のような対称性があれば，独立な成分の個数はさらに限られることになるでしょう。

練習問題

11-1　2 次元曲面における曲率テンソルの独立な成分の個数を求めよ。また 3 次元空間ではどうか。

11-2　緯度 θ，経度 ϕ を座標とする半径 R の球面座標 $(x^1,x^2)=(\theta,\phi)$ に対して，曲率テンソルを求めよ。

12　空間が平らであるための条件

12.1　曲率テンソルと平坦性

この節の内容すなわち「空間の平坦性」と「曲率テンソルゼロ」の同値性を，数学的な厳密さを保ってわかりやすく説明することは，手に余るというのが正直のところです。しかし，私たちの目的としては，ひとまずなるほどと思えるほどに大づかみできればいいので，ここでは最も簡単な具体例で追試することで理解に努めたいと思います。2 次元平面上にとられた極座標 (r, ϕ) に対して，曲率テンソルゼロから平面の平坦性を導いてみることにしましょう。

まず，基本テンソルをはじめとする，計算に必要な量のゼロでない成分を列挙すれば，計量 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ から

$$
\begin{array}{lcll}
g_{\mu\nu} & : & g_{11} = 1, & g_{22} = r^2 \\
g^{\mu\nu} & : & g^{11} = 1, & g^{22} = 1/r^2 \\
g_{\mu\nu,\rho} & : & g_{22,1} = 2r & \\
\Gamma_{\mu\nu\rho} & : & \Gamma_{122} = -r, & \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = r \\
\Gamma^{\beta}_{\nu\rho} & : & \Gamma^{1}_{22} = -r, & \Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = 1/r \\
\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} & : & \Gamma^{1}_{22,1} = -1, & \Gamma^{2}_{12,1} = \Gamma^{2}_{21,1} = -1/r^2 \\
\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} & : & \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{22} = -1 &
\end{array}
$$

となります。これを用いて曲率テンソルを計算すると，確かにすべて 0 になるようですね。

さて，(12.2) は

$$S_{,11}=0 \qquad \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}=0$$

$$S_{,12}=S_{,21}=\mathit{\Gamma}^2_{12}S_{,2} \qquad \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial r\partial\phi}=\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial\phi}$$

$$S_{,22}=\mathit{\Gamma}^1_{22}S_{,1} \qquad \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}=-r\frac{\partial S}{\partial r}$$

なる連立偏微分方程式となるわけですが,

$$S_{(1)}=r\cos\phi, \qquad S_{(2)}=r\sin\phi$$

が解になっていることは容易に確認できて，これはまさに平面直交座標にほかなりません。この場合,

$$x^1=r\cos\phi, \quad dx^1=dr\cos\phi-r\sin\phi\cdot d\phi$$
$$x^2=r\sin\phi, \quad dx^2=dr\sin\phi+r\cos\phi\cdot d\phi$$

から直接,

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2$$

が得られて，基本テンソルが定数になることが確認できます。

以上で大まかな流れとしては本節の展開が理解できたのではないでしょうか。

練習問題

12-1 平面極座標において，曲率テンソルが 0 になることを確かめよ。

12-2 平面上の斜交軸による座標が上の偏微分方程式の解であることを確かめよ。

12-3 半径 ρ の球面上にとられた 2 次元極座標における曲率テンソルを求めよ。

13　ビアンキの関係式

13.1　測地座標系

本文の展開で，ビアンキの恒等式 (13.4) を導出する過程は十分にエレガントですっきりしたものなので，巡回置換をずらして計算する (13.2) のプロセスがややこみいっているものの，これといって解説の必要な部分はないと思われます。自分でじっくり計算を追跡してみてください。

ビアンキの恒等式を証明する簡便な方法として，測地座標系というものが使われることがあります。これについて本文では触れていませんが，計算手段としてだけでなく概念としても重要なので，ここで学んでおきたいと思います。

曲がった空間（曲面）では，その空間そのものやその中における場の量の変化を調べるために，私たちは曲線座標をとることを余儀なくされました。しかし，空間の曲がりがなめらかなものであるならば，私たちは空間内の任意の点において局所的に直線座標をとることができます。その「直線」は，へばりついたアメーバにとっての直線すなわち測地線にほかなりません。その意味からこの局所直線座標系は測地座標系ともいわれます。直線座標では $\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma}$ の全成分が 0 になります。つまり，任意の点で測地座標系がとれるということは，適当な座標変換をすることによって局所的に接続係数を 0 にすることができるということです。

練習 **10-1** により，第 2 種クリストッフェル記号の逆変換は

$$\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma} = x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\beta'}{}_{,\nu}\, x^{\gamma'}{}_{,\sigma}\, \mathit{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} + x^{\mu}{}_{,\beta'}\, x^{\beta'}{}_{,\nu\sigma}$$

となります。したがって，ある点 P の接続係数が

$$\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma}(\mathrm{P}) = x^{\mu}{}_{,\beta'}\, x^{\beta'}{}_{,\nu\sigma}\Big|_{\mathrm{P}}$$

と書けるような座標系 (x') を選べば，変換後の接続係数は

$$\mathit{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(\mathrm{P}) = 0$$

と局所的に 0 になります。このとき，(x') は測地座標系となるわけです。ちなみに，座標系の選択によって 0 になったりならなかったりするというのは，まさにクリストッフェル記号がテンソルでないことを再び示すものですね。

さて，こうして選んだ測地座標系をあらためてプライムをとって表します。すると曲率テンソルの微分は

$$R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} = \mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\sigma,\rho\tau} - \mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\rho,\sigma\tau}$$

と積の項がなくなって簡単になります。接続係数の微分は一般に 0 にならないこと，また共変微分は通常の微分に等しくなることに注意してください。(ρ, σ, τ) を巡回置換して得られる式の和をとれば，ただちに目的の恒等式が得られます。そして，この恒等式はテンソルの関係式なので，座標変換において形を変えることがないため，一般の曲線座標系においても成立することが保証されているというわけです。

ところで，曲がった 4 次元時空において測地座標系とは何を意味するのでしょうか？ 重力以外にどんな力も受けない自由粒子の世界線は，時空の時間的測地線であるというのが私たちのおいた仮定でした（8 節参照）。したがって自由粒子とともに動く座標系は，時間的測地線を x^0 軸とする測地座標系であることになります。すなわち局所慣性系（局所ローレンツ系）は，時空の測地座標系にほかなりません。

練習問題

13-1　座標変換 $(x) \to (x')$ が，

$$(x' - x'_{\mathrm{P}})^{\lambda} = (x - x_{\mathrm{P}})^{\lambda} + \frac{1}{2}\mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathrm{P})(x - x_{\mathrm{P}})^{\mu}(x - x_{\mathrm{P}})^{\nu}$$

で表されるとき，新しい座標系 (x') は点 P における測地座標系となることを確かめよ。

14　リッチ・テンソル

14.1　リッチ・テンソルとスカラー曲率

曲率テンソルを縮約したものがリッチ・テンソル，さらにもう一度縮約したものがスカラー曲率ということになります。定義は明瞭ですのでとりたてて説明の必要はないと思います。ここでは，曲率テンソルにかかわる定義と符号の関係について触れておきます。さて，曲率テンソルの定義は

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}$$

でしたが，これを次のように定義する場合もみられます。

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}$$

おわかりのように，(ρ, σ) の置換されたものですから，互いに符号が逆になる定義です。

また，リッチ・テンソルの定義

$$R_{\nu\rho} = R^{\mu}_{\nu\rho\mu}$$

についても，

$$R_{\nu\rho} = R^{\mu}_{\nu\mu\rho}$$

と縮約するもうひとつの定義がみられます。この場合も曲率テンソルの性質から明らかなように，互いに符号が逆転します。混同さえしなければどちらでもかまわないのですが，符号が変わることだけ了解しておく必要があります。

そこで本文の，スカラー曲率（全曲率）は「3 次元の球面に対して正となるように定義されている」という部分ですが，一般の曲面論では，ガウスの曲率 K と呼ばれるものを全曲率ということが多く，球面に対して

$K > 0$ と定義されています。そして，普通に計量を $ds^2 > 0$ として計算した場合に，スカラー曲率 R との関係は 2 次元球面で $R = -2K < 0$ となるのです。しかし本書では基本テンソルの符号については，はじめに定義したミンコフスキー計量のものを継承しており，空間 3 次元については $ds^2 < 0$ になるようにとっていると解釈できます。そうすれば基本テンソルの符号が逆転しますから，球面のスカラー曲率も正になるはずですね。

あえて「3 次元」の球面といっているのは，4 次元内の 3 次元超球面の意味であるかもしれませんが，符号に関する事情は同じです。これまでの練習問題では，時間を含まない単純な空間（曲面）に関しては，この符号の継承はせずにすべて $ds^2 > 0$ としていますので，あしからずご了承ください。

14.2　リッチ・テンソルの対称性

ビアンキ恒等式の縮約形 (14.3) の導出は追跡が容易だと思いますが，リッチ・テンソルをクリストッフェル記号で書き下ろした (14.4) から，対称テンソルであることを証明するくだりでやや難解な部分があるので補足しておきたいと思います。

「行列式 g を微分するのには，行列の各要素 $g_{\lambda\mu}$ を微分して余因子 $gg^{\lambda\mu}$ をかけるのであった.」と本文にはありますが，これは他のどの部分でも説明されてはおらず，ディラックは (14.5) を自明の公式のようにあつかっています。この (14.5) を導出しておきましょう。以下，ひとまずアインシュタインの規約は解除して，ひとつの項に同じ添字が現れても和はとらないことにします。

まず，$g^{\lambda\mu}$ は $g_{\lambda\mu}$ の逆行列の関係になっていますから，

$$g^{\lambda\mu} = \frac{1}{g} \times \mathcal{G}_{\lambda\mu}, \qquad \mathcal{G}_{\lambda\mu} \equiv (-1)^{\lambda+\mu}\Delta_{\lambda\mu}$$

と書けます。ここに，$\Delta_{\lambda\mu}$ は行列 $g_{\lambda\mu}$ から λ 行 μ 列をのぞいた小行列式を意味し，したがって $\mathcal{G}_{\lambda\mu}$ は $g_{\lambda\mu}$ のいわゆる余因子であるとします。とこ

ろで，行列式 g を第 λ 行によって展開すると，

$$g \equiv \| g_{\lambda\mu} \| = \sum_{\mu} (g_{\lambda\mu} \times \mathcal{G}_{\lambda\mu})$$

となりますから，これを $g_{\lambda\mu}$ で微分すると

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\mu}} = \mathcal{G}_{\lambda\mu} = g g^{\lambda\mu}$$

を得ます。これを用いて，

$$g_{,\nu} = \sum_{\lambda,\mu} \left(\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\mu}} \cdot \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} \right) = g g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu,\nu}$$

と目的の公式が導かれます。最後にアインシュタインの規約復活です。最後の段は，$g < 0$ であることに注意すれば，問題なく理解できますね。

練習問題

14-1 次の公式を導け。

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\lambda\mu}} = -g g_{\lambda\mu}$$

14-2 **12-3** の結果を用いて，2 次元球面のリッチ・テンソル $R_{\mu\nu}$ およびスカラー曲率 R を求めよ。

15　アインシュタインの重力の法則

15.1　からっぽの空間に対する方程式

ようやく重力の理論を記述する数学的準備が整ったということができます。私たちはここまでで，いわゆるリーマン幾何学の内容のうち，一般相対性理論に必要なアーカイブを手にしたということになるでしょうか。

さて，いよいよアインシュタインの重力場の方程式を当面の目標とする展開になるのですが，ディラックは本節でまず重力場以外に何も存在しない空間の法則を取り上げています。(15.1) は，物質・エネルギーの存在を意味する右辺が 0 ということで，重力場の方程式の特殊な場合ということになっています。その意味ではより基本的なのですが，

$$R_{\mu\nu} = 0$$

だけでは，アインシュタインの意図はつかみきれませんね。重力場を曲がった時空として記述するのだから，その方程式は基本テンソル $g_{\mu\nu}$ の微分方程式になるだろうことは推測できますが，なぜに左辺がリッチ・テンソルなのかの必然性について納得するためには，最終的な重力場の方程式を得る 25 節まで待たねばなりません。

今はひとまず (15.1) を黙認して，この見た目には単純で未完成の方程式（実は 10 個の 4 変数関数 $g_{\mu\nu}$ に関する非線形 2 階微分方程式という十分におぞましいものですが）から生み出される重要かつ豊富な果実を，先に味わっておこうというディラックの展開に従いましょう。

$g_{\mu\nu}$ をポテンシャルと見れば，$R_{\mu\nu} = 0$ は場の方程式に見えるとのことですが，ここで場の方程式とは例えばラプラスの方程式やダランベールの方程式

$$\triangle\phi = 0, \qquad \Box\phi = 0$$

をさすことになるでしょうか。いずれもポテンシャルの 2 階微分方程式です。

16　ニュートン近似

16.1　静的な重力場と静的な座標系

私たちは，$R_{\mu\nu}=0$ という見た目には単純だけれどもその実おそろしくいりくんだ方程式を，現実の重力場に適用するために，これからあらん限りのぜい肉落としにかかります。まず，時間的に変化しない静的な重力場を静的な座標系によって扱おうというのですが，この制限を式で表現すると

$$g_{\mu\nu,0}=0, \qquad g_{m0}=0$$

となります。静的な重力場を意味する第 1 式は自明ですが，第 2 式の意味は直感的には理解しかねますね。「静的な座標系」という制限からくる $g_{m0}=0$ をせめて直感的に類推できるようにすることから始めましょう。

さて，重力以外に力を受けない自由粒子（自由落下粒子といった方がいいでしょうか）の運動方程式は，時間的な測地線方程式 (8.3) として与えられるのでした。すると，粒子の 4 元加速度は

$$\begin{aligned} \frac{dv^m}{ds} &= -\Gamma^m_{\nu\sigma}v^\nu v^\sigma \\ &= -(\Gamma^m_{00}v^0v^0+2\Gamma^m_{0n}v^0v^n+\Gamma^m_{ns}v^nv^s) \end{aligned}$$

と与えられます。もちろん，m,n,s はいわゆる空間成分を表す 1,2,3 の値をとります。(　　) 内の第 1 項は，ニュートン近似で残る正真の重力といえます。第 2・3 項は何を意味するのでしょうか？

私たちの出発点である「等価原理」が解釈のカギとなります。つまり，第 1 項が正真の重力を表すとするなら，残りは重力と原理的には区別できない慣性力を表現していると考えてよいのです。なるほどいわれてみれば，第 2 項は速さに比例するコリオリ力，第 3 項は速さ 2 乗に比例する遠心力に見えてきませんか？　第 2 項の因数 Γ^m_{0n} を 0 とする制限は，$g_{\mu\nu,0}=0$ を先行させれば $g_{m0}=0$ に通ずるのです。わかりやすくいえば，g_{m0} は座標

系に対する時空の回転を表現しており，適当な座標系の選択によってそれを無視できるような場合を考えるということですね。また，第 3 項は速度を小さいとする近似によって省略される運命にあります。慣性系にとらわれない自由な座標選択を許す一般相対性理論においては，慣性力は重力とともに基本テンソルの中に組み込まれることを肝に銘じておきましょう。

これまでの「静的」な近似によって，まず基本テンソルが多少整理されました。行列表示によれば,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

となり，空間部分が独立して g^{mn} が g_{mn} の逆行列となります。なおかつ $g_{\mu\nu,0} = 0$ はクリストッフェル記号をずいぶん簡略化してくれます。

16.2　基本テンソルと重力ポテンシャル

「静的」な近似に加えて，速度 $v^m \equiv dx^m/ds$（私たちの単位系では無次元量でミンコフスキー時空の β^m に相当します）を 1 次の微小量とする近似では，前述の慣性力を取り去ることができて，その結果 (16.3)

$$\frac{dv_m}{dx^0} = ({g_{00}}^{1/2})_{,m}$$

を得るわけです。一方ニュートン力学では，ポテンシャルを V（ただし，通常のポテンシャルを c^2 で割ったもので無次元量）として

$$\frac{dv^m}{dx^0} = V_{,m}$$

と書けますから，重力場が十分弱く $V \ll 1$ でかつ $g_{00} \simeq 1$ とする近似のもとで両者を比較して，(16.6)　　$g_{00} = 1 + 2V$ を得ます。

さあ，続いて場の方程式は何を教えてくれるのでしょう？　ここではさ

らに，重力場が弱くて時空の曲率が微小であるという近似を持ち込みます。実は，これだけ荒い近似のもとでは $R_{\mu\nu}=0$ は g_{00} に対するラプラスの方程式に帰着し，まさに g_{00} がポテンシャル V（の 1 次関数）に相当することを追認するのみです。もちろんこれは大変重要な結果で，特殊相対性理論において速さが光速に比べて十分小さいときに，その力学がニュートン力学に帰着したように，一般相対性理論においては，弱くて静的な重力場の場合には，同様の移行が成立するということです。

最後に，ニュートン力学でよく知られた重力ポテンシャルと対応させれば,

$$V={g_{00}}^{1/2}-1=-\frac{GM}{rc^2}$$

となるので，結局

$$g_{00}=1-\frac{2GM}{rc^2}$$

の結果を得ます。

練習問題

16.1 $g_{m0}=0 \quad (m=1,2,3)$ のとき，$g^{\mu\nu}$ の成分について

$$g^{00}=1/g_{00},\quad g^{m0}=0$$
$$g^{mn}\text{は}\ g_{mn}\text{の逆行列}$$

となることを示せ。

17　重力による赤方偏移

17.1　重力は時間を遅らせる

時空における時間的な距離 ds は，いわゆる固有時の経過を表すのでした。静的な座標系において位置を変えない（静止した）2 事象間については，$dx^m = 0$（$m = 1, 2, 3$）とおいて

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2$$

を得ます。重力の影響が無視できる場所では $g_{00} = 1$ となりますから，このとき ds は dx^0 に一致します。したがって本文中の式

$$\Delta s_{\text{観測}} = \Delta x^0 = \Delta s_{\text{光源}} {g_{00}}^{-1/2}$$

が表す要点は，$\Delta x^0 > \Delta s_{\text{光源}}$ にあります。すなわち静止した原子が発する単色光の周期のように，時刻と場所を選ばずに「同じ時」を刻むと思われる 2 事象の時間間隔が，強い重力下の 2 事象に対しては因子 ${g_{00}}^{-1/2} > 1$ の分だけ引き伸ばされて外から観測されるということになります。重力下の現象は，すべてがゆっくりと進むように外から見えるというわけですね。

ニュートン近似における重力赤方偏移の表式は，光の振動数 ν の偏移 $\Delta\nu$ として，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = V = -\frac{GM}{rc^2}$$

となります。ただし，最右辺は質量 M の星から距離 r に静止した原子が発する光の場合です。

17.2　光子の「質量」による説明

重力赤方偏移の結果は，重力の強い場所で発した光が遠方に届くとエネルギーを消耗することを意味しています。その大きさは，光量子の「質量」を $m = h\nu/c^2$ と仮定することで，ニュートン力学の範囲で説明が可能です。つまり，エネルギー保存によって

$$h\Delta\nu = -\frac{GMm}{r} = -h\nu\frac{GM}{rc^2}$$

を得ますから，ただちに前述と同じ重力赤方偏移の結果を得ます。光子の「質量」という仮定を持ち込む気味の悪さはあるものの，この説明が可能なことから，重力赤方偏移は一般相対論の直接の証拠としてはやや値打ちが下がるとする見方もできます。それでも上の説明は光量子説を使っていますから，アインシュタインの成果によって説明されることに変わりはないということは，敬服に値する事実です。

18　シュヴァルツシルトの解

18.1　球対称重力場

重力場の方程式の静的で球対称な解が，シュヴァルツシルトの時空です。これまで学んだリーマン幾何学のテンソル計算をいよいよ時空に適用します。なかなか骨の折れる計算ではありますが，注意深く本文の導出過程を追跡すれば，そう悩むところはないでしょう。$g_{00} = e^{2\nu}, g_{11} = -e^{2\lambda}$ とおく意義は，導出過程のエレガントさからも納得できますが，重要なのは

$$\lim_{r\to\infty} \nu(r) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} \lambda(r) = 0$$

なる関数 $\nu(r), \lambda(r)$ に対して，

$$\begin{aligned} e^{\nu} &= 1 + \nu + \frac{1}{2}\nu^2 + \cdots \\ -e^{\lambda} &= -(1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \cdots) \end{aligned}$$

と展開できるところにあります。弱い重力場では，$g_{00} \simeq 1$, $g_{11} \simeq -1$ ですから，ミンコフスキー時空とのわずかなずれを ν, λ で表しているわけです。係数の 2 は，単にクリストッフェル記号の計算で出てくる 1/2 のわずらわしさを解消したものですね。指数関数への置き換えなしに，力ずくで解くことも可能ですが，以上の置き換えは見通しのよさと計算の省力化に一役かっています。

18.2　質点の運動

球対称時空における具体的な運動については，シュヴァルツシルト面（$r = 2m$）の特異性に関わって，次節において多少の解析がされているのみです。質点の場合も光の場合も，要するに測地線方程式を積分することでその運動を決定することができるわけです。簡明さが本分の Dirac 書の

目的からは逸脱するかもしれませんが，球対称と言う特別な場合とはいえ，多くの天体のまわりの時空のよい近似となる計量がせっかく得られたのですから，実験的検証につながる運動の解析に一歩踏み込んでみたいものです。とりあえず，本節でも触れられている「水星の近日点移動」の理論的導出を目標に，ケプラー運動の修正に挑戦しておきましょう。

まず，運動方程式を導出します。測地線方程式の公式，または計量から直接オイラー方程式を書き下ろすことで各成分に対する方程式を得ます。はじめに θ に対する方程式は,

$$\mu = 2: \quad \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \cdot \dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 = 0$$

となります。ただし，簡略化のため $\dot{r} \equiv dr/ds$ などとしました。ここで初期条件が $\theta = \pi/2, \quad \dot{\theta} = 0$ となるように座標系をとれば，$\ddot{\theta} = 0$ となりますから，$\theta = \pi/2$ が一定に保たれます。すなわち，これは平面運動になることを示しています。以下 $\theta = \pi/2, \quad \dot{\theta} = 0$ とします。続いて，t および ϕ については

$$\begin{aligned}
\mu = 0: &\quad \frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \quad \text{i.e.} \quad \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = k \\
\mu = 3: &\quad \frac{d}{ds}(r^2\dot{\phi}) = 0 \qquad\qquad\qquad \text{i.e.} \quad r^2\dot{\phi} = h
\end{aligned}$$

を得ます。k, h は積分定数で，それぞれ単位質量あたりのエネルギーおよび角運動量にあたります。さて r に対する方程式がまだですが，私たちの目的のためには替わりに計量の式を ds^2 で割った次の式が便利です。

$$\begin{aligned}
1 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 \\
&= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}(k^2 - \dot{r}^2) - \frac{h^2}{r^2}
\end{aligned}$$

これを $\dot{\phi}^2 = h^2/r^4$ で割り，$u \equiv 1/r$ と変数変換した上で ϕ で微分すると,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

を得ます。これが質点の軌道方程式ですが，ニュートン力学の結果と比較すると，追加された右辺第 2 項が一般相対論の効果を表しています。

18.3　水星の近日点移動

軌道方程式の解をニュートン力学の結果にならって，

$$u(\phi) = \frac{1}{l}[1 + e\cos(1+\delta)\phi]$$

で近似することができれば，δ が水星の近日点移動を表すことになります。ここに e は離心率，l は軌道の大きさを示すパラメタです。これを再度方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{1}{l}\left[1 + e\{1-(1+\delta)^2\}\cos(1+\delta)\phi\right] \\ \text{右辺} &= \frac{1}{l}\left[1 + \frac{6me}{l}\cos(1+\delta)\phi + \frac{3me^2}{2l}\{1+\cos 2(1+\delta)\phi\}\right] \end{aligned}$$

となります。離心率が十分に小さければ右辺第 3 項は無視できますが，水星では比較的大きいので，本来であれば解を

$$u(\phi) = \frac{1}{l}[1 + \varepsilon_0 + e\cos(1+\delta)\phi + \varepsilon_2\cos 2(1+\delta)\phi]$$

と近似すべきであったことになります。しかし目的の結果は同じなので，さらなる検討は練習問題にゆずってここでは省略します。

さて，上の結果から両辺を比較すると

$$\delta \simeq -\frac{3m}{l}$$

となり，これによって r の変動周期角は 2π から

$$\mathit{\Delta}\varphi \simeq -2\pi\delta \simeq \frac{6\pi m}{l} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)} \qquad (a\ \text{は軌道長半径})$$

だけずれることになります。水星において 100 年で約 43 ″となるこの理論値は，観測値（他の惑星の影響を引いた差）に驚くべき一致をみせ，一般相対性理論の実験的証拠の重要なひとつにあげられているのです。

練習問題

18-1　ニュートン近似の結果 $g_{00} = 1 - 2m/r$ を受け入れた上で，重力場の球対称解（シュヴァルツシルト解）を導出せよ。

18-2　シュヴァルツシルト時空における自由粒子のラグランジアン

$$L = \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}^2)\right]^{1/2}$$

ただし，　$\dot{x} \equiv \dfrac{dx}{ds}$

を用いて，t, θ, ϕ に対するオイラー方程式を書き下ろせ。

18-3　計量 ds^2 の式から軌道方程式を導出する過程を確認せよ。

18-4　軌道方程式の解を

$$u(\phi) = \frac{1}{l}[1 + \varepsilon_0 + e\cos(1+\delta)\phi + \varepsilon_2 \cos 2(1+\delta)\phi]$$

とおいて，$\delta, \varepsilon_0, \varepsilon_2$ を決定せよ。

19　ブラック・ホール

19.1　中心に向かって落下する質点

本節の前半は，シュヴァルツシルト面（$r = 2m$）の物理的な性質を調べるために，中心に向かう自由落下すなわち初速 0 の 1 次元運動をあつかっています。前節の解説で述べた運動方程式の最も簡単な場合になりますから，さほど問題になることはないと思いますがいかがでしょうか？
ただし，

$$k^2 - (v^1)^2 = g_{00}$$

の式からあきらかなように,「k は定数で，質点が落ちはじめるときの g_{00} の値に等しい」というのは誤りで，$\sqrt{g_{00}}$ に等しいというべきでしょう。

$r \downarrow 2m$ のとき $t(r) \to \infty$，すなわちシュヴァルツシルト面に達するのに無限の時間を要することを導いていますが，もちろん逆に $\beta \equiv dr/dt \to 0$，すなわち観測される速さが 0 に収束することによっても十分説明できると思います。一方，質点に乗った観測者によれば自らの速さが 0 になることはないわけです。

19.2　シュヴァルツシルト面を超える

シュヴァルツシルト面（$r = 2m$）は，私たちの用いた座標 r, t によればまさに特異点であり，落下物体がそこに達するのに無限の時間を要するというのは，それだけでもただごとでない感じがします。しかし，質点とともに動く座標系ではそうならないことからもわかるように，この特異性は座標 r, t に限られたものであり，自由な座標変換が許される一般相対性理論の上ではみかけ上のものであることが説かれています。みかけの特異点を排除する変換の一例として τ, ρ なる座標が持ち込まれたのですね。

ところで，みかけの特異点はともかくとして，$r < 2m$ においてシュヴァ

ルツシルト解は生き残ることができるのでしょうか？　答えは条件つきでイエスです。計量からすぐにわかるように，g_{00} と g_{11} の符号が逆転します。したがって，t と r の役割が逆転するとみるべきです。$r < 2m$ では，t は空間的座標，r は時間的座標を表すことになるわけです。時間経過の不可逆性は，r の一方的減少の不可逆性にとってかわられます。こうした条件をつけた上で，シュヴァルツシルト解は $r < 2m$ における運動を理論的に説明できます。しかし，それを検証することが不可能であることは理解できますね。

練習問題

19-1　星から無限遠に静止した観測者が，物体を放して自由落下させたとき，星から距離 r まで落下したときに観測される物体の速さ（光速との比）は，

$$\beta(r) \equiv \frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\sqrt{\frac{2m}{r}}$$

となることを示せ。また，この速さの r による変化を概観し，最大となる r を求めよ。

19-2　測地線方程式の積分定数 $k = g_{00}v^0$ が，質点の速さ $\beta \equiv dr/dt$ を用いて

$$k = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - \beta^2/{g_{00}}^2}}$$

と書けることを導け。また，星から十分離れた（$r \gg m$），光速より十分遅い（$\beta \ll 1$）質点に対してこれを近似すると，km_0c^2 がニュートン力学におけるエネルギー（静止エネルギーを含む）に一致することを示せ。ただし，m_0 は質点の質量とする。

20　テンソル密度

簡明な展開で，$\surd\, d^4x$ が，スカラーの性質をもつ微分体積要素であることが示されています。その結果として，

$$\int \surd\, d^4x, \qquad \int S\surd\, d^4x$$

が，それぞれある時空領域において，座標変換に対する不変量としての 4 次元体積およびスカラー場の積分を表すことになります。スカラー密度以外の一般のテンソル密度の積分は，その変換が領域内の各点において異なり，それらの和としての積分はテンソルになりえません。積分時空領域が無限小である場合に限り，テンソルとしてあつかえることになるわけです。

$\surd$ の微分に関わる公式ですが，$g = -\surd^2$ より $g_{,\nu} = -2\surd\,\surd_{,\nu}$
したがって，

$$g^{-1}g_{,\nu} = 2\surd{-1}\surd_{,\nu}$$

となることから，(14.5）は

$$\begin{aligned} g_{,\nu} &= gg^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \\ \text{i.e.}\quad -2\surd\,\surd_{,\nu} &= -\surd^2 g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \\ \therefore\quad \surd_{,\nu} &= \frac{1}{2}\surd\, g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \end{aligned}$$

（14.6）は，

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{-1}g_{,\mu} &= \surd^{-1}\surd_{,\mu} \\ \therefore\quad \Gamma^{\mu}_{\nu\mu}\surd &= \surd_{,\nu} \end{aligned}$$

となります。

21　ガウスの定理，ストークスの定理

21.1　共変的発散とガウスの定理

まず，特殊相対論における粒子流の場の扱いに触れて，基本をおさえておきたいと思います。流れの場の位置変化がなめらかである場合，局所的に各粒子が同じ速度 $\boldsymbol{\beta}$ をもつと考えて問題を単純化すると，実験室系ではかった粒子数密度はローレンツ短縮によって，

$$n = \gamma n_0 \qquad \text{ただし} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

で与えられます。ここに，n_0 は今考えている粒子グループとともに動く座標系ではかった固有数密度で，スカラー場と考えることができます。すると，4 元粒子数束ベクトルを 4 元速度 $v^\mu = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta})$ を用いて，

$$N^\mu \equiv n_0 v^\mu$$

と定義することができ，その発散ゼロ

$$N^\mu{}_{,\mu} = \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{\beta}) = 0$$

はある空間領域 V での積分において，ガウスの定理

$$\int_V \nabla \cdot (n\boldsymbol{\beta}) dV = \int_{\partial V} n\boldsymbol{\beta} \cdot d\boldsymbol{S}$$

の適用によって粒子数の保存を表すことになるわけです。ただし，∂V は領域 V の表面，$d\boldsymbol{S}$ は法線方向の微小面積要素ベクトルとします。例えば，この N^μ に粒子あたりの電荷をかければ 4 元電流密度となり，その発散ゼロは電荷の保存を表すことになります。

さて，以上の議論は発散 $A^\mu{}_{,\mu}$ を共変的発散 $A^\mu{}_{:\mu}$ にとりかえることで，一般相対論に引き継ぐことができそうに思われます。しかし，ガウスの定

理が共変的発散にはそのまま適用できないという問題が残るのです。そこで前節で導入したテンソル密度を用いて，共変的発散を通常の発散に書き戻すという操作をすることになります。スカラー密度の積分は変換の不変量であることが保証されていますから，

$$A^{\mu}{}_{:\mu}\sqrt{} = (A^{\mu}\sqrt{})_{,\mu} = 0$$

が，密度 $A^0\sqrt{}$，流速 $A^m\sqrt{}$ の流体の保存を表すという結果を得ます。

一般のテンソルでは共変的発散を通常の発散に書き戻せないために，発散ゼロを保存則とみなすことができませんが，2 階反対称テンソルに限って

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\sqrt{} = (F^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\nu}$$

と書けることによって，$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$ が保存則になるというわけですね。

21.2　共変的回転とストークスの定理

発散（divergence）に比べて，回転（curl,rotation）はわかりにくいですが，ガウスの定理およびストークスの定理から類推して，流速ベクトル場の場合を考えれば，ある領域について積分したときその境界から流出する強さを表すのが発散で，境界に沿う流れ（渦）の強さを表すのが回転ということになるでしょうか。発散および回転はさらにテンソル場に拡張でき，また積分領域も一般の n 次元に拡張されますから，なかなか図式的なイメージは困難になりますね。

ところで最後の（21.7）式

$$\frac{1}{2}\int\int_{\text{面}}(A_{\mu:\nu} - A_{\nu:\mu})dS^{\mu\nu} = \int_{\text{周囲}} A_{\mu}dx^{\mu}$$

への書き換えの意味は，$dS^{\mu\nu}$ の反対称性をあらわにして，和をとるときに $A_{\mu:\nu}$ と $-A_{\nu:\mu}$ が常にセットとして現れることをわかりやすくしたということです。被積分関数自体が反対称テンソルの形をとっていることが重要ですね。また，Dirac は微分面積要素の向きを $dS^{\mu\nu} = dx^{\nu} \wedge dx^{\mu}$ と選んでいることに注意しましょう。

22　調和座標

共変的なダランベールの方程式，$\Box V=0$ の V のところに x^λ を入れた条件式は，

$$\begin{aligned}\Box x^\lambda &= g^{\mu\nu}(x^\lambda{}_{,\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} x^\lambda{}_{,\alpha}) \\ &= g^{\mu\nu}(g^\lambda_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} g^\lambda_\alpha) \\ &= -g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0\end{aligned}$$

となります。これはダランベールの方程式が，平坦な時空における場合の

$$\Box V = g^{\mu\nu}V_{,\mu\nu} = 0$$

と同じに書けるように,「調和座標」なる特殊な座標系を選んだということにほかなりません。「曲がった空間においては直線座標にもっとも近いもの」とはそういう意味ですね。もちろん，微小領域についてのみ有効な局所慣性系とはまた異なるものです。

23　電磁場

23.1　マクスウェル方程式の 4 次元形式

マクスウェル方程式は，もともとローレンツ変換において形を変えない「共変的」なものです。したがって，特殊相対論の範囲では何の変更も必要がありません。しかし，一般相対論では微分演算の共変化が要求されるために，多少の書き換えが生じます。まず，電磁テンソルを用いてマクスウェル方程式を 4 次元テンソル方程式であることが明確な形式に直します。ひとまず特殊相対論の範囲内での書き換えを行い，その後に一般共変化を行っています。

さて，マクスウェル方程式の第 1 の組（23.3）および（23.4）は，電磁場とポテンシャルの関係（23.1）および（23.2）と同値です。このことを 3 次元ベクトル形式と 4 次元テンソル形式でそれぞれ示してみましょう。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi \\
\boldsymbol{H} &= \nabla\times\boldsymbol{A} \\
\therefore\quad \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \nabla\times\nabla\phi \\
&= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{H} &= \nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa &= (\phi, \boldsymbol{A}) \\
F_{\mu\nu} &= \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu} \\
E^m &= F_{m0} \\
H^m &= F_{nr} \quad (m,n,r)\ \text{循環} \\
\therefore\quad F_{\mu\nu,\sigma} &+ F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0
\end{aligned}
$$

テンソル形式がずいぶんすっきりしていて，法則の対称性がはっきり示されていることがわかりますね。

マクスウェル方程式の第 2 の組は，第 1 の組と比較して $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ の役割を入れ替えた対称性をもっています。

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J &= (\rho, \boldsymbol{j}/c) \\
F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= 4\pi J^{\mu}
\end{aligned}
$$

23.2　共変形への書き換え

ローレンツ変換のもとで共変的なテンソル方程式に書き直されたマクスウェル方程式を，さらに一般の座標変換において形を変えない，一般共変的なテンソル方程式に修正します。ここは単に，微分を共変微分にとりかえるだけで OK です。第 1 の組は電磁テンソルの反対称性によって，自動的に共変微分ととりかえてよく，また第 2 の組は，まさに共変微分への修正を余儀なくされます。あわせて，電荷の保存則についてもテンソル密度を使ったものへと修正を受けます。電荷の保存が，電磁テンソルの反対称性をもとに第 2 の組から「導出」されているところに注目しましょう。

$$F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu} \qquad F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu:\nu} - \kappa_{\nu:\mu}$$

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0 \qquad F_{\mu\nu:\sigma} + F_{\nu\sigma:\mu} + F_{\sigma\mu:\nu} = 0$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu} \qquad F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^{\mu}$$

$$J^{\mu}{}_{,\mu} = 0 \qquad (J^{\mu}\surd)_{,\mu} = 0$$

練習問題

23-1　$F^{\mu\nu}$ に対して $*F^{\mu\nu}$ を，

$$\begin{aligned} *F^{m0} &= H^{m} = F^{nr} \\ *F^{mn} &= E^{r} = F^{0r} \qquad (m,n,r)\text{ 循環} \end{aligned}$$

で定義するとき，マクスウェル方程式の第 1 の組は第 2 の組と同形の

$$*F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

と書けることを確かめよ。　※　$*F^{\mu\nu}$ を $F^{\mu\nu}$ の双対テンソルという。

24　物質の存在によるアインシュタイン方程式の変更

24.1　物質がない場合

物質のないところでの場の方程式が,

$$R^{\mu\nu} = 0$$

で与えられることは，すでに 15 節において仮定として持ち込まれ，それによってシュヴァァルツシルトの解も得られたのでした。しかし，なぜに左辺がリッチ・テンソルなのかについてはひとまず十分な納得を保留にしてありました。ここから続く 2 つの節がその目的に割り当てられます。

ひとまず本文の,

$$R^{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0$$

はすぐに納得できますね。もちろん，物質のない空間の場合に右の形を選ぶ必然性は全くなく，冗長以外の何ものでもありません。

一応，上式の左向き矢印の導出過程を示しておきましょう。縮約の必要のためまず添え字のひとつを下げます。

$$g_{\lambda\mu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = R_{\lambda}{}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\lambda}^{\nu}R = 0$$

ここで $\lambda = \nu$ として縮約すれば，$g_{\nu}^{\nu} = 4$ に注意して

$$R - 2R = 0 \quad \text{すなわち} \quad R = 0$$

となり，これを（24.2）に代入して（24.1）を得ます。

24.2　物質がある場合

リッチ・テンソルの存在は，そもそもが質量の存在によってゆがめられた時空の曲がりを示すわけですから，場の方程式の右辺に物質の存在を示すテンソルがくるべきことは予想されることです。このテンソル $Y^{\mu\nu}$ の導入によって，

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = Y^{\mu\nu}$$

と書くとき，左辺の形がはじめて意味をなしてきます。ビアンキの関係式によって

$$Y^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$$

を要請することになり，これがエネルギーおよび運動量の保存則に該当するものになるであろうという推測が成り立つからです。

一般の保存則において微分になるべきところが共変微分になっているために，量 $Y^{\mu\nu}$ の時空における変化は保存則からのずれを生じる結果になります。本文にあるように，これは重力場自身がエネルギーと運動量をになうためということですが，以上の重大な推定への理解が次節の最大のテーマになるでしょう。

本節では，物質が存在する空間における，重力場の方程式がとるべき最終的な形をおおづかみにしています。結論として重力場の方程式が満たすべき条件は，次のように整理されます。

(1)　右辺に物質の存在を示すテンソルを含むテンソル方程式であること。
(2)　$g_{\mu\nu}$ の最高 2 階の微分を含み，それについて線形であること。

詳細は次節にゆずりますが，弱くて静的な場における近似（16 節）で，$R_{\mu\nu} = 0$ をラプラスの方程式になぞらえたように，私たちの次なる目標は，場の源を右辺に含むポアッソン方程式の拡張された形式であるということになるのです。

25　物質のエネルギー・運動量テンソル

25.1　特殊相対論におけるエネルギー・テンソルの拡張

まず，エネルギー・テンソルの本質を理解するために，特殊相対論の範囲内で，連続的な速度分布をもつ粒子系を考え，それを連続的な質量分布へと拡張してみましょう。ちなみにここで扱う粒子系は，21 節で粒子数保存を考えるモデルとして導入したものと同じです。空間に質量 m の粒子が分布しており，位置 x にある粒子の 4 元速度が

$$v(x) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}) \quad \text{ただし，}\quad \boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\boldsymbol{v}}{c}\,, \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

で与えられる連続的な速度分布を持つと仮定します。ここで $\boldsymbol{v}$ は実験室系から見た粒子の 3 次元速度で，これが粒子の位置 x の連続関数であることにより，$\boldsymbol{\beta}$ および γ も x によって決まることになります。したがって，想定した粒子集団は乱雑な熱運動をしている気体分子のようなものでなく，霧や煙の微粒子のようなものをイメージしてもらえばよいかもしれません。

さて，集団のある微小部分をとるとき，粒子の速度はほぼ同じと考えてよいので，これらの粒子グループとともに動く座標系ではかったエネルギー密度は，粒子の固有数密度を n_0 として，

$$\mathcal{E}_0 = n_0 mc^2 = \rho c^2$$

と書けます。ここで，$\rho = n_0 m$ は質量密度を表します。一方，実験室系では粒子あたりのエネルギーが γmc^2，粒子数密度が γn_0 となりますから，

$$\mathcal{E} = \gamma^2 \rho c^2$$

と書き換えられます。同様に対応する運動量密度が，

$$\mathcal{P}^n = mc\gamma\beta^n \cdot \gamma n_0 = \gamma^2 \rho c \beta^n$$

となります。そして，$(\mathcal{E}/c, \mathcal{P})$ が 4 元ベクトルを構成することを思い出しながら，4 元速度 v を用いて書き直せば，

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \rho c^2 v^0 v^0 \\ c\mathcal{P} &= \rho c^2 v^n v^0 \end{aligned}$$

となるわけです。

そこで，連続的な物質分布によるエネルギー・運動量が次のように 2 階反変テンソルとして自然に定義できることがわかります。

$$T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu$$

ここで，v^μ は 4 元速度ベクトルの成分であり，また $c = 1$ の単位系にもどったことに注意しましょう。

さて，重力以外に力を受けず，内部に相互作用を持たない物質のエネルギーテンソルの形は，曲がった時空にそのまま引き継がれます。ただし，エネルギー・運動量の密度と流速としては，少なくとも局所的な保存量でなければ意味をなさないので，20 節で学んだようにテンソル密度 $T^{\mu\nu}\surd$ を採用することになります。そして，物質の保存（25.3）

$$(\rho v^\mu)_{:\mu}\surd = (\rho v^\mu \surd)_{,\mu} = 0$$

は当然条件として課すことができるものの，エネルギーテンソルは保存則を構成できません。その理由は 2 つの面から表現できます。ひとつは，後述のように ${T^{\mu\nu}}_{:\nu} = 0$ が確認できるものの，21 節で学んだようにこれを積分してガウスの定理に適合する形に直すことが一般に不可能なためです。もうひとつは，前の節で触れられているように重力場自身がエネルギーと運動量をになうためです。

25.2　運動方程式とエネルギー・テンソル

連続的な物質分布の中の1質点にもどって，力を受けない場合の特殊相対論の枠内での運動方程式を書けば，

$$0=\frac{dp^\mu}{ds}=mc\frac{dv^\mu}{ds}=mcv^\mu{}_{,\nu}\,v^\nu$$

となりますが，これに数密度 γn_0 をかけることにより，

$$0=\rho c v^\mu{}_{,\nu}\,v^\nu$$

これを曲がった時空に適合するように書けば，測地線方程式

$$v^\mu{}_{:\nu}v^\nu=0$$

を得ます。

一方エネルギーテンソルの共変微分は，

$$T^{\mu\nu}{}_{:\nu}=v^\mu(\rho v^\nu)_{:\nu}+\rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu}$$

となりますから，物質保存（25.3）の成立のもとで $T^{\mu\nu}{}_{:\nu}=0$ は測地線方程式と同値であることになります。これは，本来運動方程式の座標積分がエネルギー原理にあたることと，もとをたどれば同じといえますね。

重要なことは，ビアンキの関係式から場の方程式の形として（25.6）

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}=kT^{\mu\nu}$$

が推測されることです。もしこうしてよいのなら，場の方程式は自動的に物質保存と測地線に沿う運動の法則を含むというエレガントな結果を得ることになることは，本節の最後に示された通りです。

もちろん，以上で場の方程式の形が上のように一意的に決定できたというわけにはいきません。しかし，少なくともこれまでのところで考え得る最も単純で美しい最有力候補であることは認めざるを得ないのではないでしょうか。そして，後に残された課題は，静的で弱い場の近似によって，場の方程式の $(\mu,\nu)=(0,0)$ 成分がポアッソン方程式 $\nabla^2V=4\pi\rho$ に一致すべきことを用いて，係数 $k=-8\pi$ を決めることだけです。

26　重力場に対する作用原理

重力場における自由質点の作用積分は，9 節で学んだように

$$I = -mc\int ds = -mc\int\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x^{\mu}}\dot{x^{\nu}}}dt$$

で与えられ，$\delta I = 0$ から測地線を得るのでした。ここに，作用原理の構造を見ると，

(1)　被積分関数は x とその 1 階微分を含み，その積分はスカラー
(2)　$\delta I = 0$ が運動方程式を与える
(3)　運動方程式は x の 2 階微分方程式

となっています。そこで重力場を与える作用原理は類推によれば，

(1)　被積分関数は $g_{\mu\nu}$ とその 1 階微分を含み，その積分はスカラー
(2)　$\delta I = 0$ が重力場の方程式を与える
(3)　重力場の方程式は $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分方程式

という構造をもつと考えられます。そこで，(1) の被積分関数の有力候補として $R\sqrt{}$ が導入されるに至るわけですね。

$R\sqrt{}$ の積分はスカラーを与えるものの，$g_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含む点で難点を残しています。そこで，R を $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含む項 R^* と 1 階微分しか含まない項 L に分けて，ガウスの定理により体積積分が変分 0 の表面積分に直される全微分の項を省略することによって，結局

$$I = \int R\sqrt{}d^4x = \int L\sqrt{}d^4x = \int \mathcal{L}d^4x$$

を得ています。力学におけるラグランジアンと比較すれば，$\mathcal{L}$ は 3 次元的なラグランジアン密度といえることがわかります。

以下，アインシュタインの真空方程式の導出まではなかなか骨の折れる計算ですが，特に補足を要する点もないと思います。ただ，この節の中の

計算で $\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ が μ，ν について対称なことを 2 度ばかり使っているので注意しましょう。1 度目は（26.4）の後半 2 項の計算で，

$$
\begin{aligned}
(R^*\sqrt{}\text{の後 2 項}) &= -(g^{\mu\nu}\sqrt{}),_{\nu}\,\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\sigma} + (g^{\mu\nu}\sqrt{}),_{\sigma}\,\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} \qquad \leftarrow (22.5)(22.4)\\
&= g^{\nu\beta}\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\beta\nu}\sqrt{}\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\sigma} + (-g^{\nu\beta}\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\beta\sigma} - g^{\mu\alpha}\mathit{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\sigma} + g^{\mu\nu}\mathit{\Gamma}^{\beta}_{\sigma\beta})\sqrt{}\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}\\
&= g^{\nu\beta}\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\beta\nu}\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\sigma}\sqrt{} + (-2g^{\nu\beta}\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\beta\sigma} + g^{\mu\nu}\mathit{\Gamma}^{\beta}_{\sigma\beta})\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}\sqrt{}
\end{aligned}
$$

となるところで，2 度目は（26.7）の最後の行に移る際に，

$$
\begin{aligned}
2\delta(\mathit{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{})\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta} &= \delta[(g^{\nu\mu}\mathit{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha} + g^{\beta\mu}\mathit{\Gamma}^{\nu}_{\mu\alpha})\sqrt{}\,]\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta} \qquad \leftarrow (22.3)\\
&= -\delta(g^{\nu\beta},_{\alpha}\sqrt{})\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta}
\end{aligned}
$$

となるところです。

27　物質が連続的に分布している場合の作用

場の法則を作用原理に帰着させることの意義のひとつは，場と物質との相互作用をそれぞれの作用積分の和として表現できるという簡明さにあります。質量の分布が存在する場合の変分原理を，

$$\delta(I_g + I_m) = 0$$

という形に打ち立てることによって，物質の存在が重力場に与える影響が I_m から生じて場の方程式に変更を与えるとともに，逆に重力場の変化は物質がたどるべき測地線に変更を与えることになります。

さて，物質が位置を変えることによって計量 $g_{\mu\nu}$ が変わるわけですが，その変わり方が新しい作用原理によって与えられるべき場の方程式に従うということになるので，$g_{\mu\nu}$ の変分を直接考えることには困難があります。そこで Dirac は，密度・流束ベクトル p^μ の変分を通じて I_m の変更を試みています。物質素片の時空位置の変分 b^μ に対する p^μ の変分は，

$$\delta p^\mu = (p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)_{,\nu}$$

と与えられていますが，ここで $b^0 = 0$ の場合に変分に対する物質保存から得られる δp^0 の結果からの類推を使っています。「もし，b^μ が p^μ に比例していたら物質素片はそれぞれの世界線にそってずれるだけ」すなわち $b^\mu = kp^\mu$ ならば，

$$\delta p^0 = (p^r b^0 - p^0 b^r)_{,r} = (p^r kp^0 - p^0 kp^r)_{,r} = 0$$

となることから上の結果が類推されるわけですね。

次に質点の作用積分

$$I = -m \int ds = \int L dx^0$$

を物質の連続的な分布に適用して，$p^\mu = \rho v^\mu \surd$ の関係から

$$I_m = -\int \rho \surd d^4x$$

の結果を得ています。しかしこれはわかりやすい形にしただけであり，v^μ が長さ 1 に規格化（$v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1$）されていることから，Dirac による「$g_{\mu\nu}$ には手をふれずに」という回避策を逸脱しているために変分に適さないとして保留されているのです。なお，質点の運動量

$$\frac{\partial L}{\partial (dx^r/dx^0)} = m\frac{dx^r}{ds}$$

の左辺は，解析力学の変分原理における運動量の定義そのものです。

作用積分を p^μ に書き戻してその変分をとるにあたっての（27.9）のあとの計算の 1 行目は,

$$\begin{aligned}
\delta(p^\mu p_\mu)^{1/2} &= \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu)^{-1/2}(\delta p^\nu p_\nu + p^\nu \delta p_\nu) \\
&= \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu)^{-1/2}(\delta p^\nu p_\nu + p^\nu \delta g_{\nu\lambda} p^\lambda + p^\nu g_{\nu\lambda}\delta p^\lambda) \\
&= \frac{1}{2}(p^\lambda p_\lambda)^{-1/2}(p^\mu p^\nu \delta g_{\mu\nu} + 2p_\mu \delta p^\mu)
\end{aligned}$$

によります。途中 $p_\nu = g_{\nu\lambda}p^\lambda$ の関係を使っていることに注意しましょう。

結論として作用積分の変分は,（27.11）の結果を含めて

$$\begin{aligned}
\delta(I_g + I_m) &= -\int \left[\kappa\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu\right]\surd\, \delta g_{\mu\nu} d^4x \\
&\qquad + \int \rho v_{\mu:\nu} v^\nu b^\mu \surd\, d^4x
\end{aligned}$$

となり，$\delta g_{\mu\nu}$ の係数 $=0$ がアインシュタインの場の方程式を与え，一方 b^μ の係数 $=0$ が測地線方程式を与えるという目的の結果を得ました。蛇足ですが，δp^μ の項の書き換え（27.11）の途中で，部分積分の方法によりいわゆる全微分 $(\quad)_{,\nu}$ の形を変分 0 としておとしていることを申し添えます。

28　電磁場の場合の作用

電磁場の作用密度がいきなり与えられていますが，被積分関数がスカラー密度になるべきことや変分 0 の条件が電磁場の線形微分方程式になることを思えば，$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{}$ が相当するであろうことは納得がいきますね。あとは作用原理が電磁場の方程式を与えることを確認できればひとまず十分としましょう。係数の $-(16\pi)^{-1}$ は，変分原理によって得られる方程式の単位を合わせることで得られます。

ここで重要なことは，作用積分 I_{em} が $g_{\mu\nu}$ と電磁ポテンシャル κ_σ の微分との汎関数であるという点ですね。したがって，両者による変分を独立にとりその和を全体の変分とすることになるわけです。その結果，

(1)　電磁場の応力エネルギー・テンソルの項
(2)　電磁場テンソルの微分の項

の和という形式を得ます。(1) は質量分布に関する作用積分から生じるエネルギーテンソルに対応し，(2) は電磁場に固有の項としてその変分原理が電磁場の方程式を与えることになるわけです。電磁場の作用のみの変分原理 $\delta I_{em} = 0$ を考察してみましょう。特殊相対論の範囲では，$\delta g_{\mu\nu}$ が考えられないために，(1) の変分は意味をなしませんが，(2) の変分原理から得られる

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

が真空の Maxwell 方程式を与えることはもうおわかりですね。

練習問題

28-1　特殊相対論の範囲で

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2)$$

となることを確かめよ。

29　電荷をもつ物質の場合

29.1　連続的な電荷分布の作用

電荷 e をもつ粒子と電磁場との相互作用を示す作用積分が,

$$I = -\int \kappa_\mu dx^\mu = -e\int \kappa_\mu v^\mu ds$$

と導入されています。ここでもまた私たちは，電磁場との相互作用を決める唯一のパラメータである電荷を係数とし，そしてまた，電磁場を決定する 4 元ベクトルポテンシャル κ_μ が座標の関数であって，dx^μ との積が時空のスカラーとなることをもって，ひとまずこの類推を認めることとしましょう。結論としてこの作用積分をつけたした上での変分原理が，すでに経験的に知られた電荷と電磁場の相互作用の形式を誘導することをもって，その承認としたいと思います。

あとの展開は，質量分布に対する p^μ に習って，連続的な電荷分布における電流密度に対応する $\mathcal{J}^\mu$ の導入によって同様の「運動学的」な考察がなされています。作用積分（29.4）

$$I_q = -\int \kappa_\mu \mathcal{J}^\mu d^4x$$

における $\mathcal{J}^\mu = \sigma v^\mu \surd$ の定義は，p^μ の質量密度 ρ を電荷密度 σ に置き換えたものにほかなりません。またその変分（29.5）

$$\delta I_q = \int \sigma[-v^\mu \delta\kappa_\mu + F_{\mu\nu} v^\nu b^\mu] \surd\, d^4x$$

にいたる計算では，まず部分積分により全微分 $(\quad)_{,\nu}$ の項を省いていること，また最後に $F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu}$ の書き換えがなされていることはもうおわかりですね。

29.2　電荷分布と場の相互作用

さて，現時点で最も一般的な場合の相互作用の形式が，変分原理

$$\delta(I_g + I_m + I_{em} + I_q) = 0$$

により導出されます。わかりやすい形に一覧にしておきましょう。

作用積分	$\sqrt{}\delta g_{\mu\nu}$ の係数	$\sqrt{}\delta\kappa_\mu$ の係数	$\sqrt{}b^\mu$ の係数
$I_g = -\frac{1}{16\pi}\int R\sqrt{}d^4x$	$-\frac{1}{16\pi}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)$		
$I_m = -\int \rho\sqrt{}d^4x$	$-\frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu$		$\rho v_{\mu:\nu}v^\nu$
$I_{em} = -\frac{1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{}d^4x$	$-\frac{1}{2}E^{\mu\nu}$	$\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}_{:\nu}$	
$I_q = -\int \kappa_\mu J^\mu\sqrt{}d^4x$		$-J^\mu$	$F_{\mu\nu}J^\nu$
変分原理の結果	重力場の方程式	電磁場の方程式	運動方程式

変分原理の結果導出される 3 つの方程式は互いに独立ではなく，運動方程式は重力場の方程式と電磁場の方程式からも導かれることが最後に示されています。連続的な物質分布に対する場の方程式とビアンキの関係式から得られる

$$(\rho v^\mu v^\nu)_{:\nu} = 0$$

が，測地線方程式を与えることが 25 節で示されていますが，同様に（29.10）

$$(\rho v^\mu v^\nu + E^{\mu\nu})_{:\nu} = 0$$

は，電荷をもった物質の運動が電磁場によって測地線からそらされる法則を表しているといえますね。

念のため，$4\pi E^{\mu\nu}{}_{:\nu}$ の計算の 1 行目右辺第 2 項の計算は次のようになります。

$$\begin{aligned}
F^{\mu\alpha}{}_{:\nu}F^\nu{}_\alpha &= g^{\mu\rho}g^{\alpha\sigma}F_{\rho\sigma:\nu}F^\nu{}_\alpha \\
&= g^{\mu\rho}F_{\rho\sigma:\nu}F^{\nu\sigma} \\
&= g^{\mu\rho}\cdot\frac{1}{2}(F_{\rho\sigma:\nu}F^{\nu\sigma} + F_{\rho\nu:\sigma}F^{\sigma\nu}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}F^{\nu\sigma}(F_{\rho\sigma:\nu} - F_{\rho\nu:\sigma}).
\end{aligned}$$

30　一般的な作用原理

30.1　作用原理と場の方程式の形式

ここでは，重力場と相互作用する任意の場がある場合の一般的な作用原理と，そこから得られる場の方程式の形式論が展開され，結論として変分原理から得られる場の方程式が独立でないことを示しています。

まず，重力場の作用積分の変分において

$$\delta I_g = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \right)_{,\nu} \right] \delta g_{\alpha\beta} d^4 x$$

の被積分関数は $g_{\alpha\beta}$ と $g_{\alpha\beta,\nu}$ の関数 $\mathcal{L}$ に対するオイラー方程式の左辺にあたります。したがって，その導出過程において

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \delta g_{\alpha\beta,\nu} d^4 x = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \delta g_{\alpha\beta} \right] - \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \right)_{,\nu} \delta g_{\alpha\beta} d^4 x$$

の右辺第 1 項が，積分領域の境界条件によって落とされていることに注意しましょう。

一方，他の場をテンソル ϕ_n と表して，それに対する作用積分 I' が変分に与える寄与を考察しています。添字 n は，複数の場を区別する番号ですね。たとえば電磁場が重力場とともに存在する場合，

$$\phi_1 = \kappa_\mu \qquad \mathcal{L}' = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \surd$$

$$p^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + N^{\mu\nu}, \qquad N^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} E^{\mu\nu}$$

$$\chi^1 = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}{}_{:\nu}$$

となるでしょう。$p^{\mu\nu} = 0$ は，電磁場のエネルギーの存在によって変更を加えられた重力場の方程式を与え，$\chi^1 = 0$ は真空中の電磁場の方程式を与えることになります。重力場と相互作用するどんな場も，同様にして重力場の方程式に対して相互作用を表す 1 項を付加することになるわけです。

30.2　場の方程式の非独立性

ビアンキの関係式

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{:\nu}=0$$

によって $N^{\mu\nu}{}_{:\nu}=0$ が要請されるために，作用原理から導出される重力場の方程式および他の場の方程式のすべてが互いに独立とはならず，したがって前節で計算されているようにある方程式が他の方程式の連立によって導出されるという結果を生じることになります。このことを本文では，作用積分 I' の領域の表面を変えない座標変換における不変性から自然に $N^{\mu\nu}{}_{:\nu}=0$ が導かれることによって証明を試みています。この作用積分の不変性が，場の方程式の非独立性の一般的な根拠であるというわけです。やや操作的にみえる計算の真意をくみとることは正直のところちょっと難解ですが，計算そのものを追跡することはそう難しくないでしょう。$\delta I'$ の計算で 2 行目から 3 行目に移るところでは，次のように部分積分をしています。

$$\begin{aligned}\int N^{\mu\nu}(-g_{\mu\alpha}b^{\alpha}{}_{,\nu}-g_{\nu\alpha}b^{\alpha}{}_{,\mu})\surd\, d^4x &= \int(-N_{\alpha}{}^{\nu}b^{\alpha}{}_{,\nu}-N_{\alpha}{}^{\mu}b^{\alpha}{}_{,\mu})\surd\, d^4x\\ &= \int(-2N_{\alpha}{}^{\nu}b^{\alpha}{}_{,\nu})\surd\, d^4x\\ &= \big[-2N_{\alpha}^{\nu}\surd\, b^{\alpha}\big]+2\int(N_{\alpha}^{\nu})_{,\nu}b^{\alpha}d^4x\end{aligned}$$

結果の第 1 項は，積分領域の境界で $b^{\alpha}=0$ であることから消えることになるのです。

練習問題

30-1　作用原理の一般論において，$\mathcal{L}'$ が場の量 ϕ_n の座標による 1 階以上の微分を含んでいても，変分 $\delta I'$ において $\delta g_{\mu\nu}$ の項以外はすべて $\delta\phi_n$ の項に集約されることを説明せよ。ただし，$\mathcal{L}'$ は $g_{\mu\nu}$ の 1 階以上の微分は含まないものとする。

31　重力場のエネルギー擬テンソル

エネルギーテンソルに対して，

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu} = 0$$

が成立しますが，対称テンソルの性質（21.4）

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu}\sqrt{\ } = (Y_\mu{}^\nu\sqrt{\ })_{,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta,\mu}Y^{\alpha\beta}\sqrt{\ }$$

を用いれば，

$$(Y_\mu{}^\nu\ \sqrt{\ })_{,\nu} = \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta,\mu}Y^{\alpha\beta}\sqrt{\ } \quad \neq 0$$

となり，一般にエネルギー保存が成立しません。これは，重力場そのものがエネルギーを担うことによるものと考えることができます。そこで重力場のエネルギー・運動量密度を表す擬テンソルを（31.1）

$$t_\mu{}^\nu\sqrt{\ } = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}g_{\alpha\beta,\mu} - g_\mu^\nu\mathcal{L}$$

によって定義しているわけですが，これは解析力学におけるエネルギーの定義

$$H = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q} - L$$

に対応するものです。ラグランジュ関数 $L(q,\dot{q})$ が時間 t を陽に含まないとき，

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\ddot{q}$$

となりますが，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

を用いると，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q} - L\right) = 0$$

となることによって保存が保証されている形式です。26 節で学んだように，$\mathcal{L}$ は重力場のラグランジアン密度にあたるものですから，$t_\mu{}^\nu\sqrt{}$ の定義は重力場がになうエネルギー・運動量として自然な表現といえます。

保存則（31.2）

$$[(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu)\sqrt{}\,]_{,\nu} = 0$$

にいたる計算は以上の解析力学のものにそのまま対応しています。ただ，$t_\mu{}^\nu$ が擬テンソルであるために，一般の座標変換において不変ではありえず，そのために重力場のエネルギーは局所的な記述が不可能であることが述べられています。

32　擬テンソルの具体的な表式

前節において，エネルギー保存を記述するために重力場のエネルギー・運動量擬テンソル $t_{\mu\nu}$ を導入したわけですが，当然ながらこれは計量テンソルとその微分のみで表現されます。(31.1) の表式は十分にその中身を表してはいるものの，実際これを計量テンソルでそのまま書き下ろすと途方もなく長く複雑なものが得られるだけで，このあとの議論には無意味です。そこでとりあえずこの後の重力波の議論の中で有用な表式を得るために，第 1 項の微分変数を $g_{\alpha\beta,\nu}$ から $(g^{\alpha\beta}\surd)_{,\nu}$ にとりかえるというテクニックを使っています。これは調和座標を選ぶことによって簡明な記述が可能になる形式を準備しておこうということです。

変数変換の証明のところで，

$$\frac{\partial Q_{m,\sigma}}{\partial q_{n,\nu}} = \frac{\partial}{\partial q_{n,\nu}} \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_n} \, q_{n,\sigma} \right) = \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} \, g^{\nu}_{\sigma}$$

という変形を使っています。また，30 節で宣言されているように，ここでも $\mathcal{L}$ はもとのものに対して $(16\pi)^{-1}$ 倍してあることに注意しましょう。

$\mathcal{L}$ を残した中途半端に見える書き下ろしの意味は次節で明らかにされます。

33　重力波

33.1　弱い重力波の近似

からっぽの空間の弱い重力場を調和座標によって記述することによって，重力波の伝播を表すダランベールの方程式（波動方程式）が得られることを示しています。したがって，ここで用いている前提は，

(1)　真空重力場の方程式　$R_{\mu\nu}=0$　→　(33.1)

(2)　弱い重力場の近似

(3)　調和座標の条件　$g^{\mu\nu}\mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}=0$　→　(33.2)

の 3 つです。(3) の書き換えは，$g_{\rho\lambda}$ をかけて

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}g_{\rho\lambda}\mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\mathit{\Gamma}_{\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\rho\mu,\nu}+g_{\rho\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}) \\
&= g^{\mu\nu}(g_{\rho\mu,\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho})=0
\end{aligned}
$$

となります。結論として，

$$
g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma,\mu\nu}=\Box\, g_{\rho\sigma}=0
$$

を得るわけですが，ダランベルシアン$\Box$はミンコフスキー空間では，

$$
\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle
$$

であり，上のダランベール方程式は計量テンソルの各成分が波動方程式を満たすということを意味しています。

練習問題

33-1　真空中の弱い重力場の方程式は，調和座標において

$$
R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Box\, g_{\mu\nu}=0
$$

となることを示せ。

33.2　平面重力波

考えている領域の重力波がすべて同一方向に進行するいわゆる平面波の場合，作用密度が $\mathcal{L}=0$ となってエネルギー擬テンソル $t_\mu{}^\nu$ の表式が簡明になり,「透明な」結果が得られることを示しています。

x^3 方向に進む波の場合に，$g_{\mu\nu}$ が x^0-x^3 だけの関数になるというのは，わかりやすくミンコフスキー空間において z 方向に進む正弦波を仮定すれば,

$$\phi=\phi_0 \exp i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

に対して，$\boldsymbol{k}=(0,0,k)$ であることから

$$\phi=\phi_0 \exp i(\omega t-kz)=\phi_0 \exp i\frac{\omega}{c}(ct-z)$$

と書けることにあたります。進行方向を指す定数ベクトルが l_σ である一般の場合には $l_\sigma x^\sigma$ だけの関数になるということは，l^σ をそのまま 4 元波数ベクトル $l^\sigma=(\omega/c,\boldsymbol{k})$ と考えれば，ミンコフスキー空間の場合

$$l_\sigma x^\sigma=\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$$

に対応しますから納得できますね。同様にベクトル l_σ が光的であることは,

$$l^\sigma l_\sigma=\omega^2/c^2-k^2=0$$

にあたり，波が光速で伝播することを意味しています。

この l_σ を用いて, (33.5)

$$g_{\mu\nu,\sigma}=u_{\mu\nu}l_\sigma \quad , \quad u_{\mu\nu}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial(l_\sigma x^\sigma)}$$

とおき，さらに調和座標条件を（33.6）

$$u^\nu_\rho l_\nu=\frac{1}{2}\,u\,l_\rho \quad , \quad u=u^\mu_\mu$$

として適用することにより,

$$\mathcal{L}=L\surd=0$$

を導いています。L の計算は一見ごちゃごちゃするものの，全ての項があっという間に消えてなくなります。

「電磁場についても対応する事情」というのは，$g_{\mu\nu}$ を 4 元ポテンシャル κ_μ に対応させ，その微分の 2 次形式で表される L を $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ に対応させるとき，平面波について作用密度ゼロが導かれる経緯が同じであることを指します。このとき，調和座標条件に相当するものがローレンツ条件なのです。

前準備が整ったところで，いよいよエネルギー擬テンソル ${t_\mu}^\nu$ を計算しています。説明のとおりに進めていけば困難なく結論に達することができるでしょう。最後の行に移るときに用いているのは（33.7）であると思われます。平面波に限れば ${t_\mu}^\nu$ はテンソルと同等になり，重力場のエネルギーを局所的に表現できるという結果を得たわけです。

練習問題

33-2　ローレンツ条件

$$\kappa^\mu{}_{,\mu} = 0 \qquad （\kappa は 4 元ポテンシャル）$$

のもとで，平面電磁波に対して

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$$

となることを示せ。ただし，添字の上下については $g^{\mu\nu}$ の変動部分を無視して（ミンコフスキー計量と同等の扱いで）おこなってよいものとする。

34　重力波の偏り

34.1　重力波が運ぶエネルギー

x^3 方向に進行する波においてエネルギー擬テンソルを計算して，重力波が確かにその進行方向にエネルギーを運ぶことを示しています。本文のとおりに追跡していけば，下の結果を容易に確認できるでしょう。ただし，途中計算で「最後の行を書くには（34.1）を利用」とあるのは，(34.2)の間違いと思われます。

$$\begin{aligned} 16\pi {t_0}^0 &= \frac{1}{4}(u_{11}-u_{22})^2 + {u_{12}}^2 \\ {t_0}^3 &= {t_0}^0 \end{aligned}$$

${t_0}^0$ は重力波のエネルギー密度，${t_0}^3$ は x^3 方向へのエネルギー流密度を表すことになります。また，これらが u_{11}, u_{22}, u_{12} のみで表現されていることは，重力波が横波であることを示しています。

34.2　重力波の偏り

重力波の偏波が，進行方向を軸とする座標回転において 2 回対称である 2 つの成分をもつことを示しています。ここで微小回転の演算子 R というものを導入していますが，これは訳者の第 8 図の説明にあるように，x^1x^2 面内での微小角 ε の座標軸回転に対する量 a の変換が，

$$a' = (1+\varepsilon R)a$$

となるものとして定義されています。したがって，ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対しては微小回転変換を

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \mathsf{I} + \varepsilon \mathsf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

と書けば,

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathsf{R}\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 \\ -A^1 \end{pmatrix}$$

と行列にまとめることができます。ただし，変換を受ける (x^1, x^2) 成分のみを取り出しました。

一方，$\mathsf{u} = u_{\alpha\beta}$ はテンソルとして変換しますから,

$$\begin{aligned} \mathsf{u}' = \mathcal{R}_\varepsilon \mathsf{u}\, {}^{\mathrm{t}}\mathcal{R}_\varepsilon &= \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{11} + 2\varepsilon u_{12} & u_{12} - \varepsilon(u_{11} - u_{22}) \\ u_{12} - \varepsilon(u_{11} - u_{22}) & u_{22} - 2\varepsilon u_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるわけですが，これは

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathsf{R}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22}) \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{12} \\ -2 \times \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22}) \end{pmatrix}$$

とまとめることができます。ベクトル $(\frac{1}{2}(u_{11} - u_{22}), u_{12})$ に対しては回転角 ε の係数が 2 になるところがポイントで，これは今考えている座標軸の回転に対してこのベクトルが 2 回対称になることを表します。

練習問題

34-1　x^1x^2 面内での回転,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

に対する

$$\mathsf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

の変換を計算して，${t_0}^0$ の成分をなす $\frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})$ と u_{12} の回転対称性および相互関係を調べよ。

35　宇宙項

もともと宇宙項 $\lambda g_{\mu\nu}$ は，静的な宇宙の解を得る必要性からアインシュタインが残したものといわれます。宇宙膨張の事実が見出されて，現実の宇宙が決して静的でないということが明らかになってその役割を失ったかに見えますが，宇宙論のようにより大きなスケールの議論においては小さな値でもゼロでなければその影響が大きいため，宇宙項の自由度をあえて残して現在でも議論の対象とされているようです。

本来，重力場の方程式の左辺として課せられた，$g_{\mu\nu}$ とその 2 次までの微係数からつくられる 2 階テンソルであるという要請から，宇宙項は最後に残された自由度として許容されるものであることが証明されています。

作用原理においては，ラグランジアン密度に対して単に定数に相当する $c\sqrt{}$ を加えることで，宇宙項を記述できることを示しています。(35.2) 以下の 16π は $(16\pi)^{-1}$ の誤りではないかと思われます。そうであれば，(35.3) は

$$c = \frac{\lambda}{8\pi}$$

となり，宇宙項およびエネルギーテンソルを含む重力場の方程式の最大形式は次で与えられます。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \lambda g^{\mu\nu} = -\kappa Y^{\mu\nu}$$

ここで $\kappa = 8\pi$ となりますが，もちろん光速 c と万有引力定数 G をいずれも 1 とする単位系を使用していますから，それを補えば

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

となります。

練習問題解答

1-1

ある慣性系において，粒子の変位を (dt, dx, dy, dz) と観測したとすれば，時空距離は

$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{(cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} \\
&= cdt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}} \\
&= cdt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{dt}{\gamma} \qquad (c=1)
\end{aligned}
$$

となり，粒子の固有時間の経過 $d\tau$ に一致する。

　また，4 元速度は

$$
u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\mu}{dt}
$$

だから，時間成分・空間成分はそれぞれ

$$
u^0 = \gamma, \qquad \boldsymbol{u} = \gamma\boldsymbol{\beta}
$$

となる。

1-2

4 元運動量の定義から，

$$
p^\mu = m_0 c u^\mu = m_0 c \frac{dx^\mu}{d\tau}
$$

であり，$d\tau$ がスカラーであるから p^μ は dx^μ と同じ変換に従う 4 元ベクトルである。

また，その成分は上に続いて

$$
(p^\mu) = \left(m_0 c \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \boldsymbol{v}) = (E/c, \boldsymbol{p})
$$

となる。したがってまた，

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \boldsymbol{p}^2$$

となって，これはスカラーであるから $\boldsymbol{p}=0$ となる座標系（粒子とともに動く座標系）における値 ${E_0}^2/c^2$ に一致する。よって，

$$E = \sqrt{{E_0}^2 + \boldsymbol{p}^2 c^2}$$

が導かれた。

1-3

実際に右辺の和をとってみると，

$$\begin{aligned}
(F^{\mu\nu}u_\nu) &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma\beta_x \\ -\gamma\beta_y \\ -\gamma\beta_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{\gamma}{c} \begin{pmatrix} \beta_x E_x + \beta_y E_y + \beta_z E_z \\ E_x + v_y B_z - v_z B_y \\ E_y + v_z B_x - v_x B_z \\ E_z + v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix} \\
&= \frac{\gamma}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{v}/c
\end{aligned}$$

となり，4 元運動方程式の右辺の空間成分が $\gamma\boldsymbol{f}/c$ であることを考慮すれば，

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

とローレンツ力の表式を得る。

2-1

x^1 軸に対して x^2 軸が反時計回りに α の角度をなすとする。計量テンソルは,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

だから，ベクトル A の共変成分 (A_1, A_2) は，反変成分 (A^1, A^2) によって

$$\begin{aligned} A_1 &= A^1 + A^2 \cos\alpha \\ A_2 &= A^1 \cos\alpha + A^2 \end{aligned}$$

と書けるが，これはまさに x^1 軸および x^2 軸への A の正射影となる。

2-2

x^1, x^2, x^3 軸の基底（単位ベクトル）をそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とすると，変位ベクトル $d\boldsymbol{x}$ はその反変成分によって,

$$d\boldsymbol{x} = dx^1\boldsymbol{e}_1 + dx^2\boldsymbol{e}_2 + dx^3\boldsymbol{e}_3$$

と書ける。したがって計量は,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1\boldsymbol{e}_1 + dx^2\boldsymbol{e}_2 + dx^3\boldsymbol{e}_3)^2 \\ &= (dx^1)^2{\boldsymbol{e}_1}^2 + (dx^2)^2{\boldsymbol{e}_2}^2 + (dx^3)^2{\boldsymbol{e}_3}^2 \\ &\quad +2(dx^1dx^2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 + dx^2dx^3\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 + dx^3dx^1\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1) \\ &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &\quad +2(dx^1dx^2\cos\alpha + dx^2dx^3\cos\beta + dx^3dx^1\cos\gamma) \end{aligned}$$

となるから，計量テンソルは次のとおりである。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{pmatrix}$$

3-1

球座標の基本テンソル

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

によって，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の共変成分は

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$$

となるから，

$$\begin{aligned}(A_1, A_2, A_3) &= (A^1, r^2A^2, r^2\sin^2\theta A^3) \\ &= (A_r, rA_\theta, r\sin\theta A_\varphi).\end{aligned}$$

3-2

座標の計量および基本テンソルは，次のとおりである。

$$ds^2 = R^2d\theta^2 + R^2\cos^2\theta d\phi^2 \qquad (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

したがってベクトル $\boldsymbol{A}$ において，座標 $x^1 = \theta$，$x^2 = \phi$ についての反変成分を (A^1, A^2)，共変成分を (A_1, A_2) とおけば，

$$\boldsymbol{A}^2 = A_\theta^2 + A_\phi^2 = A^1A_1 + A^2A_2 = R^2(A^1)^2 + R^2\cos^2\theta(A^2)^2$$

となるので，求める関係は以下のようになる。

$$A^1 = \frac{1}{R}A_\theta \qquad A_1 = RA_\theta$$

$$A^2 = \frac{1}{R\cos\theta}A_\phi \qquad A_2 = R\cos\theta A_\phi$$

7-1

基本テンソルの変換は,

$$g_{\alpha'\beta'} = x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, g_{\mu\nu}$$

となるから，これをさらに微分すると

$$\begin{aligned}
g_{\alpha'\beta'},_{\gamma'} &= x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, g_{\mu\nu},_{\sigma} + (x^{\mu}{}_{,\alpha'\gamma'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'} + x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}\, x^{\mu}{}_{,\alpha'})g_{\mu\nu} \\
g_{\alpha'\gamma'},_{\beta'} &= x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, g_{\mu\sigma},_{\nu} + (x^{\mu}{}_{,\alpha'\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + x^{\sigma}{}_{,\gamma'\beta'}\, x^{\mu}{}_{,\alpha'})g_{\mu\sigma} \\
g_{\beta'\gamma'},_{\alpha'} &= x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, g_{\nu\sigma},_{\mu} + (x^{\nu}{}_{,\beta'\alpha'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + x^{\sigma}{}_{,\gamma'\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'})g_{\nu\sigma}
\end{aligned}$$

を得る。(第 1 式＋第 2 式－第 3 式)/2 により，クリストッフェル記号の変換は

$$\Gamma_{\alpha'\beta'\gamma'} = x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, \Gamma_{\mu\nu\sigma} + x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}\, g_{\mu\nu}$$

となる。右辺第 2 項の存在により似非テンソルであることが確認された。

7-2

緯度 $x^1 = \theta$，経度 $x^2 = \phi$ に対する球面座標の基本テンソルは,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix} \qquad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

である（練習問題 **3-2** 参照)。成分の座標による微分係数で 0 でないのは,

$$g_{22},_{1} = -R^2 \sin 2\theta$$

のみであり，したがって第 1 種クリストッフェル記号は,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{221} = \Gamma_{212} &= \frac{1}{2}g_{22},_{1} = -\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta \\
\Gamma_{122} &= -\frac{1}{2}g_{22},_{1} = \frac{1}{2}R^2\sin 2\theta
\end{aligned}$$

その他の成分は 0

また，第 2 種クリストッフェル記号は，

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} &= g^{22}\Gamma_{212} = -\tan\theta \\ \Gamma^1_{22} &= g^{11}\Gamma_{122} = \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

その他の成分は 0

となる。これを用いて，平行移動によるベクトルの変化は

$$\begin{aligned} dA_1 &= -\frac{1}{2}A^2R^2\sin 2\theta\cdot d\phi \\ dA_2 &= \frac{1}{2}R^2\sin 2\theta(A^1 d\phi - A^2 d\theta) \end{aligned}$$

となる。座標軸への射影 (A_θ, A_ϕ) を用いて，変位 $(0, d\phi)$ に対する結果を得ると

$$\begin{aligned} dA_\theta &= -A_\phi \sin\theta\cdot d\phi \\ dA_\phi &= A_\theta \sin\theta\cdot d\phi \end{aligned}$$

となる。

9-1

L の偏微分をとると，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{L}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{g_{\lambda\nu},_\mu\,\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu}{2L}$$

$$\begin{aligned} \because \quad \frac{\partial(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)}{\partial\dot{x}^\sigma} &= g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\dot{x}^\mu}{\partial\dot{x}^\sigma}\dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu\frac{\partial\dot{x}^\nu}{\partial\dot{x}^\sigma}\right) \\ &= g_{\mu\nu}(g^\mu_\sigma\dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu g^\nu_\sigma) \\ &= g_{\sigma\nu}\dot{x}^\nu + g_{\mu\sigma}\dot{x}^\mu = 2g_{\sigma\nu}\dot{x}^\nu. \end{aligned}$$

したがって，オイラー方程式の左辺は

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{L}\right)-\frac{g_{\lambda\nu},_\mu\,\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu}{2L}\\
=\quad & g_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\nu}{L}\right)+\frac{\dot{x}^\nu}{L}g_{\mu\nu},_\lambda\,\dot{x}^\lambda-\frac{g_{\lambda\nu},_\mu\,\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu}{2L}\\
=\quad & g_{\mu\nu}L\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)+\frac{1}{2L}(g_{\mu\nu},_\lambda+g_{\mu\lambda},_\nu-g_{\lambda\nu},_\mu)L^2\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}\\
=\quad & L\left(g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\Gamma_{\mu\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}\right)=0
\end{aligned}
$$

となる。ただし，途中で $Ld\tau=ds$ を用いた。
両辺に $g^{\alpha\mu}/L$ をかけると，

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}=0$$

と測地線の方程式を得る。

9-2

ラグランジアン L の偏微分をとると，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}=\frac{2mg_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{1-\dfrac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}},\qquad \frac{\partial L}{\partial x^\mu}=\frac{mg_{\lambda\nu},_\mu\,\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu}{\sqrt{1-\dfrac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}.$$

ラグランジュ方程式をつくって，

$$d\tau=dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$$

によりパラメタを座標時 t から固有時 τ にとりかえると，**9-1** とほぼ同じ計算によって測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0$$

を得る。したがって，粒子は曲面上の測地線を軌道として運動する。

この問題は，曲がった4次元時空とそれを埋め込んだ平坦な5次元空間の関係を類推するのに格好の材料である。イメージとして，曲面への拘束は重力場すなわち曲がった時空への拘束に相当し，測地線軌道は自由粒子の世界線に相当することになる。

ちなみに，非相対論的な範囲では拘束される空間（曲面，曲線）の線素を ds として，

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mg_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \qquad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$$

となり，運動方程式

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0$$

を得る。

10-1

与えられた変換に $g^{\delta'\alpha'}$ をかけて添字をひとつ上げると，

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\delta'}_{\beta'\gamma'} &= x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^{\alpha'}{}_{,\eta}\, g^{\zeta\eta}(x^\mu{}_{,\alpha'}\, x^\nu{}_{,\beta'}\, x^\sigma{}_{,\gamma'}\, g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + x^\mu{}_{,\alpha'}\, x^\nu{}_{,\beta'\gamma'}\, g_{\mu\nu}) \\
&= x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^\nu{}_{,\beta'}\, x^\sigma{}_{,\gamma'}\, g^\mu_\eta g^{\zeta\eta} g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^\nu{}_{,\beta'\gamma'}\, g^\mu_\eta g^{\zeta\eta} g_{\mu\nu} \\
&= x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^\nu{}_{,\beta'}\, x^\sigma{}_{,\gamma'}\, g^\zeta_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^\nu{}_{,\beta'\gamma'}\, g^\zeta_\nu \\
&= x^{\delta'}{}_{,\lambda}\, x^\nu{}_{,\beta'}\, x^\sigma{}_{,\gamma'}\, \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + x^{\delta'}{}_{,\nu}\, x^\nu{}_{,\beta'\gamma'}
\end{aligned}$$

となり，これが求める変換である。

10-2

$$
\begin{aligned}
&A^{\alpha'}{}_{:\gamma'} = A^{\alpha'}{}_{,\gamma'} + \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} A^{\beta'} \\
&= \quad (x^{\alpha'}{}_{,\mu} A^{\mu})_{,\sigma}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + (x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + x^{\alpha'}{}_{,\nu}\, x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'})x^{\beta'}{}_{,\rho} A^{\rho} \\
&= \quad (x^{\alpha'}{}_{,\mu\sigma} A^{\mu} + x^{\alpha'}{}_{,\mu} A^{\mu}{}_{,\sigma})x^{\sigma}{}_{,\gamma'} \\
&\qquad\qquad + (x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, g^{\nu}_{\rho} \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + x^{\alpha'}{}_{,\nu}\, x^{\beta'}{}_{,\rho}\, x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'})A^{\rho} \\
&= \quad (x^{\alpha'}{}_{,\mu\sigma}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + x^{\alpha'}{}_{,\nu}\, x^{\beta'}{}_{,\mu}\, x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'})A^{\mu} \\
&\qquad\qquad + x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, A^{\mu}{}_{,\sigma} + x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} A^{\rho} \\
&= \quad x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, (A^{\mu}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} A^{\rho}) = x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, A^{\mu}_{:\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\because \quad x^{\alpha'}{}_{,\mu\sigma}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + x^{\alpha'}{}_{,\nu}\, x^{\beta'}{}_{,\mu}\, x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'} = (x^{\alpha'}{}_{,\sigma}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'})_{,\mu} = g^{\alpha'}_{\gamma'}{}_{,\mu} = 0
$$

11-1

$R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の成分は合計 $2^4 = 16$ 個である。
場合分けして考えると，

(i)　添字がすべて同じ場合　　$R_{1111} = R_{2222} = 0.$

(ii)　添字が 3 つだけ同じ場合　　$2 \times 4 = 8$ 個すべて 0。

(iii)　2 つ同じ添字が 2 組ある場合

全部で 6 個あって，

$$R_{1122} = R_{2211} = 0$$

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$$

以上，独立な成分は 1 個である。

3 次元空間の場合も同様の考察で，独立な成分の個数は 6 個となる。

11-2

7-2 の結果

$$g_{11} = R^2 \qquad g_{22} = R^2\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{221} = \Gamma_{212} &= -\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta & \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} &= -\tan\theta \\ \Gamma_{122} &= \frac{1}{2}R^2\sin 2\theta & \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

を用いて，添字を下げた曲率テンソル

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta}(\Gamma^\beta_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\beta_{\nu\rho,\sigma}) + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\alpha\rho} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\alpha\sigma}$$

を計算する。**11-1** の結果から独立な成分のひとつは

$$\begin{aligned} R_{1212} &= g_{11}\Gamma^1_{22,1} - \Gamma^2_{21}\Gamma_{122} \\ &= R^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) - (-\tan\theta)\cdot\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta \\ &= R^2\cos^2\theta \end{aligned}$$

となる。

12-1

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22,1} = -1, \quad \Gamma^2_{12,1} = \Gamma^2_{21,1} = -1/r^2 \\ \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} = -1 \end{aligned}$$

から，曲率テンソルの 0 でないと考えられる成分は，R_{1221} および対称性によりこれと関連付けられたものに限られる（**11-1** 参照)。ところが,

$$\begin{aligned} R^1_{221} &= -\Gamma^1_{22,1} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} \\ &= -(-1) + \frac{1}{r}\cdot(-r) = 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$R_{1221}=R_{2112}=-R_{2121}=-R_{1212}=0$$

すなわち曲率テンソルの成分はすべて 0 であることが確認された。

12-2

2 軸のなす角を α とすると,

$$S_{(1)}=x^1=r\cos\phi-\frac{r\sin\phi}{\tan\alpha},\qquad S_{(2)}=x^2=\frac{r\sin\phi}{\sin\alpha}$$

となるのでこれを微分すると,

$$\frac{\partial S_{(1)}}{\partial r}=\cos\phi-\frac{\sin\phi}{\tan\alpha},\qquad \frac{\partial S_{(1)}}{\partial\phi}=-r\sin\phi-\frac{r\cos\phi}{\tan\alpha}$$
$$\frac{\partial S_{(2)}}{\partial r}=\frac{\sin\phi}{\sin\alpha},\qquad \frac{\partial S_{(2)}}{\partial\phi}=\frac{r\cos\phi}{\sin\alpha}$$

さらに微分して,

$$\frac{\partial^2 S_{(1)}}{\partial r^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 S_{(1)}}{\partial r\partial\phi}=-\sin\phi-\frac{\cos\phi}{\tan\alpha}=\frac{1}{r}\frac{\partial S_{(1)}}{\partial\phi}$$
$$\frac{\partial^2 S_{(1)}}{\partial\phi^2}=-r\left(\cos\phi-\frac{\sin\phi}{\tan\alpha}\right)=-r\frac{\partial S_{(1)}}{\partial r}$$
$$\frac{\partial^2 S_{(2)}}{\partial r^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 S_{(2)}}{\partial r\partial\phi}=\frac{\cos\phi}{\sin\alpha}=\frac{1}{r}\frac{\partial S_{(2)}}{\partial\phi}$$
$$\frac{\partial^2 S_{(2)}}{\partial\phi^2}=-\frac{r\sin\phi}{\sin\alpha}=-r\frac{\partial S_{(2)}}{\partial r}$$

したがって，$S_{(1)},S_{(2)}$ が偏微分方程式 $S_{,\mu\nu}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}S_{,\sigma}$ の解であることが確認された。

12-3

必要な量のうち 0 でないものを計算して列挙すれば,

$$ds^2 = dr^2 + \rho^2 \sin^2 \frac{r}{\rho} \cdot d\phi^2$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \rho^2 \sin^2 \frac{r}{\rho}, \qquad g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 r/\rho}$$

$$g_{22,1} = \rho \sin \frac{2r}{\rho}$$

$$\mathit{\Gamma}_{122} = -\frac{1}{2}\rho \sin \frac{2r}{\rho}, \qquad \mathit{\Gamma}_{212} = \mathit{\Gamma}_{221} = \frac{1}{2}\rho \sin \frac{2r}{\rho}$$

$$\mathit{\Gamma}^1_{22} = -\frac{1}{2}\rho \sin \frac{2r}{\rho}, \qquad \mathit{\Gamma}^2_{12} = \mathit{\Gamma}^2_{21} = \frac{1}{\rho \tan r/\rho}$$

$$\mathit{\Gamma}^1_{22,1} = -\cos \frac{2r}{\rho}, \qquad \mathit{\Gamma}^2_{12,1} = \mathit{\Gamma}^2_{21,1} = -\frac{1}{\rho^2 \sin^2 r/\rho}$$

$$\mathit{\Gamma}^1_{22}\mathit{\Gamma}^2_{12} = \mathit{\Gamma}^2_{12}\mathit{\Gamma}^1_{22} = -\cos^2 \frac{r}{\rho}$$

となる。したがって曲率テンソルの 0 でない成分は,

$$R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -\sin^2 \frac{r}{\rho} \quad .$$

13-1

与えられた変換式を x^ρ で微分すると,

$$\begin{aligned} x^{\lambda'}{}_{,\rho} &= g^\lambda_\rho + \frac{1}{2}\mathit{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\mathrm{P})\left\{g^\mu_\rho(x - x_\mathrm{P})^\nu + (x - x_\mathrm{P})^\mu g^\nu_\rho\right\} \\ &= g^\lambda_\rho + \frac{1}{2}\left\{\mathit{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu}(\mathrm{P})(x - x_\mathrm{P})^\nu + \mathit{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho}(\mathrm{P})(x - x_\mathrm{P})^\mu\right\} \end{aligned}$$

さらに x^σ で微分すると,

$$x^{\lambda'}{}_{,\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left\{\mathit{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu}(\mathrm{P})g^\nu_\sigma + \mathit{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho}(\mathrm{P})g^\mu_\sigma\right\}$$

となる。また，変換式を $x^{\alpha'}$ で微分すると，

$$g^{\lambda}_{\alpha} = x^{\lambda}{}_{,\alpha'} + \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathrm{P})\left\{x^{\mu}{}_{,\alpha'}(x-x_{\mathrm{P}})^{\nu} + (x-x_{\mathrm{P}})^{\mu}x^{\nu}{}_{,\alpha'}\right\}$$

$$\therefore \quad x^{\gamma}{}_{,\lambda'}\Big|_{\mathrm{P}} = g^{\gamma}_{\lambda}$$

となるから，結局

$$\begin{aligned} x^{\gamma}{}_{,\lambda'}\,x^{\lambda'}{}_{,\rho\sigma}\Big|_{\mathrm{P}} &= g^{\gamma}_{\lambda}\cdot\frac{1}{2}\left\{\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}(\mathrm{P})g^{\nu}_{\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}(\mathrm{P})g^{\mu}_{\sigma}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma}(\mathrm{P}) + \Gamma^{\gamma}_{\sigma\rho}(\mathrm{P})\right\} \\ &= \Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma}(\mathrm{P}) \end{aligned}$$

すなわち，

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(\mathrm{P}) = 0$$

つまり，座標系 (x') は点 P における測地座標系となる。

14-1

$$\| g_{\lambda\mu} \| \cdot \| g^{\mu\nu} \| = \| g_{\lambda\mu}g^{\mu\nu} \| = \| g^{\nu}_{\lambda} \| = 1$$

より，
$$g \equiv \| g_{\lambda\mu} \| = \frac{1}{\| g^{\lambda\mu} \|}$$

したがって，以下アインシュタインの規約を解除して

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\lambda\mu}} = \frac{\partial}{\partial g^{\lambda\mu}}\left(\frac{1}{\| g^{\lambda\mu} \|}\right) = -\frac{1}{\| g^{\lambda\mu} \|^2}\frac{\partial \| g^{\lambda\mu} \|}{\partial g^{\lambda\mu}}$$

ここで，$\| g^{\lambda\mu} \|$ を余因子 $\mathcal{G}^{\lambda\mu} = \| g^{\lambda\mu} \| g_{\lambda\mu}$ を用いて

$$\| g^{\lambda\mu} \| = \sum_{\mu}(g^{\lambda\mu} \times \mathcal{G}^{\lambda\mu})$$

と展開すれば，

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\lambda\mu}} = -\frac{\mathcal{G}^{\lambda\mu}}{\| g^{\lambda\mu} \|^2} = -\frac{g_{\lambda\mu}}{\| g^{\lambda\mu} \|} = -g g_{\lambda\mu}$$

を得る。

14-2

12-3 の結果

$$R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -\sin^2\frac{r}{\rho}$$

を用いて，リッチテンソル $R_{\nu\rho} = R^{\mu}_{\nu\rho\mu}$ を計算すれば,

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{22}R_{2112} = -\frac{1}{\rho^2} \\ R_{12} &= R_{21} = 0 \\ R_{22} &= g^{11}R_{1221} = -\sin^2\frac{r}{\rho} \end{aligned}$$

となる。また，$R = g^{\nu\rho}R_{\nu\rho}$ によりスカラー曲率は,

$$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = -\frac{2}{\rho^2}$$

となる。なお，これは空間的距離の符号を $ds^2 > 0$ とした結果であり，$ds^2 < 0$ すなわち $g < 0$ とした場合には $R = 2/\rho^2 > 0$ となる。

16-1

$g_{\mu\nu}$ を行列表示すると,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{mn} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

となるから,

$$g \equiv \| g_{\mu\nu} \| = g_{00} \| g_{mn} \| .$$

一方，$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列だから，

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} \times \mathcal{G}_{\mu\nu} \qquad (\mathcal{G}_{\mu\nu}\text{は}\, g_{\mu\nu}\text{の余因子})$$

と書ける。したがって各成分は,

$$g^{00} = \frac{1}{g} \times \parallel g_{mn} \parallel = \frac{1}{g_{00}}$$

$$g^{m0} = \frac{1}{g} \times \mathcal{G}_{m0} = 0 \qquad \because \quad \mathcal{G}_{m0} = (-1)^m \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} g^{mn} &= \frac{1}{g} \times \mathcal{G}_{mn} \\ &= \frac{1}{g} \times g_{00} \times \tilde{\mathcal{G}}_{mn} \quad (\tilde{\mathcal{G}}_{mn}\text{は}\,(g_{mn})\text{ に対する }g_{mn}\text{の余因子}) \\ &= \frac{\tilde{\mathcal{G}}_{mn}}{\parallel g_{mn} \parallel} \quad \text{すなわち } g^{mn}\text{は}\, g_{mn}\text{の逆行列} \end{aligned}$$

となる。

18-1

$g_{11} = -f(r)$ とおいてクリストッフェル記号を計算すると，以下のようになる。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - f(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2)$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{11} = -f(r), \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2\sin^2\theta$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{m}{r^2(1-2m/r)},$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{m}{r^2 f}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{f'}{2f}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{f}, \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{f},$$

$$\varGamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad \varGamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$\varGamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \varGamma^3_{23} = \cot\theta$$

これらを用いて，重力場の方程式は

$$R_{00} = \frac{m}{2r^2 f}\left\{\frac{f'}{f} + \frac{2m}{r^2(1-2m/r)}\right\} = 0$$
$$\text{i.e.} \quad \frac{f'}{f} = -\frac{2m}{r^2(1-2m/r)}$$

となり，これを積分して $\lim_{r\to\infty} f(r) = 1$ により，

$$f(r) = \frac{1}{1-2m/r}$$

を得る。他の成分についても同じである。

18-2

$$L = \left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\phi}^2)\right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

だから，t については

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$

θ については，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -r^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\phi}^2$$
$$\therefore \quad \frac{d}{ds}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\phi}^2 = 0$$
$$\text{i.e.} \quad \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\cdot\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\phi}^2 = 0$$

また，ϕ については

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{d}{ds}(r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}) = 0$$

を得る。

18-3

ds^2 の式に代入して得られた結果を $\dot{r}^2$ について解くと，

$$\dot{r}^2 = k^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right)$$

ここで，$u = 1/r, \quad \dot{r} = -\dot{u}/u^2$ と変数変換すると，

$$\frac{\dot{u}^2}{u^4} = k^2 - (1 - 2mu)(1 + h^2u^2)$$

$\dot{\phi}^2 = u^4h^2$ だから，上式の両辺に $u^4/\dot{\phi}^2 = 1/h^2$ をかければ

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{h^2}(k^2 - 1 + 2mu - h^2u^2 + 2mh^2u^3)$$

これを ϕ で微分して整理すると，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

を得る。

18-4

与えられた u を軌道方程式にあらためて代入すれば，

左辺 $\simeq \dfrac{1}{l}[1 + \varepsilon_0 - 2\delta e \cos(1+\delta)\phi - 3\varepsilon_2 \cos 2(1+\delta)\phi]$

右辺 $\simeq \dfrac{1}{l}\left[1 + \dfrac{3m}{2l}(2 + e^2) + \dfrac{6me}{l}\cos(1+\delta)\phi + \dfrac{3me^2}{2l}\cos 2(1+\delta)\phi\right]$

となるから両辺を比較して，

$$\varepsilon_0 \simeq \frac{3m}{2l}(2+e^2), \quad \delta \simeq -\frac{3m}{l}, \quad \varepsilon_2 \simeq -\frac{me^2}{2l}$$

を得る。$\varepsilon_0, \delta, \varepsilon_2, m/l$ が同程度の微小量となることから，これらについて 2 次の項を捨てたことがあらためて正当化される。

19-1

dt/dr の式をひっくり返すだけで，ただちに

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{k}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

であるが，無限遠（$r=\infty$）から初速 0（$v^1=0$）で落下する物体について，

$$k = \sqrt{1-\frac{2m}{r}+(v^1)^2} = 1$$

が保存されるから，

$$\beta(r) = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{\frac{2m}{r}}$$

となる。これを r で微分すると，

$$\frac{d\beta(r)}{dr} = \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{m}{2r}}(r-6m)$$

となり，$r=6m$ で $|\beta(r)|$ は最大値をとる。

19-2

$$\beta^2 = \frac{(v^1)^2}{(v^0)^2} = \frac{k^2 - g_{00}}{(k/g_{00})^2} = {g_{00}}^2 \left(1 - \frac{g_{00}}{k^2}\right)$$

だから,

$$\begin{aligned} k = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - \beta^2/{g_{00}}^2}} &\simeq \sqrt{g}_{00}\left(1 + \frac{\beta^2}{2{g_{00}}^2}\right) \\ &\simeq \left(1 - \frac{m}{r}\right)\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \\ &\simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{m}{r} \end{aligned}$$

を得る。したがって，ニュートン力学の標準的な表記にもどせば次のエネルギーの式を得る。

$$km_0c^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{GMm_0}{r} \quad .$$

23-1

与えられたテンソル方程式

$$*F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

から第 1 の組の 3 次元ベクトル形式を導けばよい。まず,

$$\begin{aligned} *F^{0\nu}{}_{,\nu} &= *F^{0m}{}_{,m} \\ &= -H^m{}_{,m} = 0 \\ \text{すなわち} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} *F^{m\nu}{}_{,\nu} &= *F^{m0}{}_{,0} + *F^{mn}{}_{,n} \\ &= H^m{}_{,0} + E^r{}_{,n} - E^n{}_{,r} \qquad (m, n, r)\ \text{循環} \\ &= \left[\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E}\right]^m = 0 \\ \text{すなわち} \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} &= -\nabla \times \boldsymbol{E}. \end{aligned}$$

当然ながら，共変形は微分を共変微分ととりかえればよく，

$$*F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$$

となる。

28-1

電磁場のテンソルは,

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

だから,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -2({E_x}^2 + {E_y}^2 + {E_z}^2) + 2({H_x}^2 + {H_y}^2 + {H_z}^2) \\ &= -2(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2) \end{aligned}$$

となる。

30-1

$\mathcal{L}'$ が ϕ_n ，$\phi_{n,\sigma}$ ，$\cdots$ を含むとき，作用積分の変分は

$$\delta I' = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi_n} \delta \phi_n + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi_{n,\sigma}} \delta \phi_{n,\sigma} + \cdots \right) \sqrt{}\, d^4 x$$

という形になる。ただし，添字については場を区別する n を含めて和をとるものとする。ここで例えば 1 階微分の項を取り出して，

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi_{n,\sigma}} \delta \phi_{n,\sigma} = A^{n\sigma} \delta \phi_{n,\sigma}$$

とおけば，その積分は

$$\int A^{n\sigma} \delta \phi_{n,\sigma} \sqrt{}\, d^4 x = \left[A^{n\sigma} \sqrt{}\, \delta \phi_n \right] - \int (A^{n\sigma} \sqrt{})_{,\sigma} \delta \phi_n d^4 x$$

と部分積分でき，右辺第 1 項は積分領域の境界で $\delta \phi_n = 0$ となるために消える。同様に高階微分の項も部分積分で順次階数を下げることができるから，結局 $\delta g_{\mu\nu}$ の項以外はすべて $\delta \phi_n$ の項に集約される。

33-1

（33.3）,（33.4）を用いて，

$$\begin{aligned}
R_{\rho\sigma} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\rho\sigma\nu} \\
&\simeq \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\rho\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\sigma,\rho\nu} + g_{\rho\sigma,\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\mu\nu,\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho\sigma} + g_{\rho\sigma,\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma,\mu\nu} = \frac{1}{2} \Box\, g_{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

33-2

4 元ポテンシャル κ_μ を $l_\sigma x^\sigma$ だけの関数と見ることができる（ただし，$l_\sigma l^\sigma = 0$）。すると，

$$\kappa_{\mu,\sigma} = u_\mu l_\sigma \quad , \quad u_\mu = \frac{\partial \kappa_\mu}{\partial(l_\sigma x^\sigma)}$$

と書くことができて，ローレンツ条件は

$$\kappa^\mu{}_{,\mu} = u^\mu l_\mu = 0$$

となるから，

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} \\
&= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(u_\mu l_\nu - u_\nu l_\mu)(u_\alpha l_\beta - u_\beta l_\alpha) \\
&= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(u_\mu u_\alpha l_\nu l_\beta - u_\mu u_\beta l_\nu l_\alpha - u_\nu u_\alpha l_\mu l_\beta + u_\nu u_\beta l_\mu l_\alpha) \\
&= 2u_\mu u^\mu l_\nu l^\nu - 2u_\mu l^\mu u^\nu l_\nu = 0
\end{aligned}$$

34-1

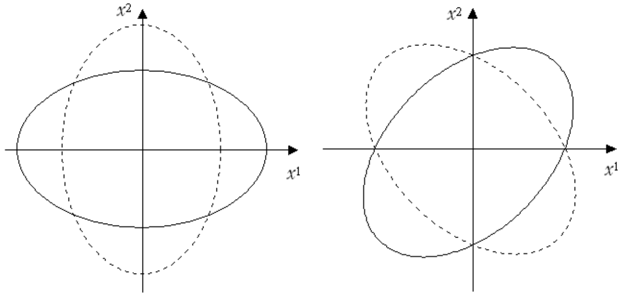
$$\begin{aligned}
\mathsf{u}' &= \mathcal{R}\mathsf{u}\,{}^{\mathrm{t}}\mathcal{R} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{11}\cos^2\theta + u_{12}\sin 2\theta + u_{22}\sin^2\theta & -\frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})\sin 2\theta + u_{12}\cos 2\theta \\ -\frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})\sin 2\theta + u_{12}\cos 2\theta & u_{11}\sin^2\theta - u_{12}\sin 2\theta + u_{22}\cos^2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるから，エネルギーに寄与する成分は次のように変換する。

$$\frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})' = \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})\cos 2\theta + u_{12}\sin 2\theta$$

$$u_{12}{}' = u_{12}\cos 2\theta - \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})\sin 2\theta$$

$\theta = \pi$ は両者を変えないから，2 つの成分はいずれも回転において 2 回対称である。また，$\theta = \pm\pi/4$ は両者を交換するから，2 つの成分は互いに 45 °ずれた方向への偏波を示す。



参考文献

[1] 平川浩正：『相対論』（共立出版，1971）

[2] 藤井保憲：『時空と重力』（産業図書，1979）

[3] ランダウ，リフシッツ：『場の古典論』第 6 版
（恒藤敏彦，広重徹訳，東京図書，1978）

[4] 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）

[5] 冨田憲二：『相対性理論』（丸善，1990）

[6] 菅野禮司：『微分形式による特殊相対論』（丸善，1996）

[7] 戸田盛和：『相対性理論 30 講』（朝倉書店，1997）

[8] テイラー，ホイーラー：『一般相対論入門―ブラックホール探査』
（牧野伸義訳，ピアソン・エデュケーション，2004）