

まえがき

一般相対性理論のテキストは数多くありますが、Dirac のものはそのミニマムエッセンスをスモールステップでまとめていて、無駄を省いた簡明さに特徴があります。その圧縮された表現のゆえに読み解いていくのも決して簡単ではありませんが、一般相対性理論を本格的に学ぼうとするのなら、どんなテキストでも読み進めるのにはそれなりの「執念」が必要なものです。私も一度挫折して放っておいた Dirac を、他の何冊かのテキストで独習した後に再度手にして何とか読めるようになったのですが、改めてその簡明さに感心しました。

決して厚いとはいえない Dirac のテキストには、必要にして最小限の内容がコンパクトにおさまっています。力のある人ならば、Dirac 自身のまえがきにもあるように、「最小の時間と労力でもって、一般相対性理論のもっともわかりにくいところを突破し、興味のわいた問題の専門的な研究にはいつてゆくことができるようになる」ことでしょう。ゼミなどで使うには手ごろなねだんと厚さかもしれません。しかし、初めて本格的な一般相対性理論の学習にとりくもうとする人には、ちょっと手助けがほしくなるところがかなりあります。

本書は Dirac の「一般相対性理論」(江沢 洋訳, 東京図書)を私が四苦八苦して学んだ跡をそのまま解説書としてまとめたものです。経験上人に教えようとするときに自分の理解も最も深まるものです。この作業を自ら課すことで、学習のはずみをつけようかなと都合のいいことを考えて書き始めて、何度かつまづきながらも何とか完結を見ることができました。正直のところ私自身「読破した」とはいいきれず、Dirac 書の簡明さを台無しにはしていないかとの不安もありますが、いつかどこかでテンソル解析とリーマン幾何学の高い障壁を前に、挫折しそうになっている人たちに対してちょっとした手助けにでもなればと思っています。

高橋 善樹

2007 年 1 月 24 日

目次

1	特殊相対性理論	1
1.1	時空座標	1
1.2	ベクトルと座標の計量	2
1.3	反変ベクトル・共変ベクトル	3
1.4	テンソルと縮約	4
1.5	テンソル方程式	5
2	斜交軸	8
2.1	斜交軸の計量	8
2.2	共変ベクトルと添字の上げ下げ	10
3	曲線座標	11
3.1	微分と座標変換	11
3.2	テンソルの変換	12
3.3	球座標の計量	12
4	似非テンソル	14
4.1	似非テンソル	14
4.2	商の定理	14
5	曲がった空間	15
5.1	リーマン空間	15
5.2	曲がった時空の計量	16
6	平行移動	17
6.1	曲がった空間における平行移動	17
6.2	高次元空間への埋め込み	18
6.3	平行移動によるベクトルの変化	19

7	クリストッフェル記号	21
7.1	曲がった時空の自己完結的記述	21
7.2	クリストッフェル記号と平行移動の公式	22
8	測地線	23
8.1	測地線 = 曲がった時空上の「直線」	23
8.2	自由粒子は時間的測地線を描く	24
9	測地線の停留性	25
9.1	変分原理による測地線方程式の導出	25
9.2	自由粒子の作用積分	26
10	共変微分	28
10.1	平行移動と共変微分	28
10.2	微分係数のテンソル化	29
10.3	時空の幾何学の数学的道具	30
11	曲率テンソル	32
11.1	共変微分の非可換性	32
11.2	曲率テンソルの対称性	33
12	空間が平らであるための条件	35
12.1	曲率テンソルと平坦性	35
13	ビアンキの関係式	37
13.1	測地座標系	37
14	リッチ・テンソル	39
14.1	リッチ・テンソルとスカラー曲率	39
14.2	リッチ・テンソルの対称性	40
15	アインシュタインの重力の法則	42
15.1	からっぽの空間に対する方程式	42

16	ニュートン近似	43
16.1	静的な重力場と静的な座標系	43
16.2	基本テンソルと重力ポテンシャル	44
17	重力による赤方偏移	46
17.1	重力は時間を遅らせる	46
17.2	光子の「質量」による説明	47
18	シュヴァルツシルトの解	48
18.1	球対称重力場	48
18.2	質点の運動	48
18.3	水星の近日点移動	50
19	ブラック・ホール	52
19.1	中心に向かって落下する質点	52
19.2	シュヴァルツシルト面を超える	52
20	テンソル密度	54
21	ガウスの定理，ストークスの定理	55
21.1	共变的発散とガウスの定理	55
21.2	共变的回転とストークスの定理	56
22	調和座標	57
23	電磁場	58
23.1	マクスウェル方程式の4次元形式	58
23.2	共変形への書き換え	59
24	物質の存在によるアインシュタイン方程式の変更	60
24.1	物質がない場合	60
24.2	物質がある場合	61

25	物質のエネルギー・運動量テンソル	62
25.1	特殊相対論におけるエネルギー・テンソルの拡張	62
25.2	運動方程式とエネルギー・テンソル	64
26	重力場に対する作用原理	65
27	物質が連続的に分布している場合の作用	67
28	電磁場の場合の作用	69
29	電荷をもつ物質の場合	70
29.1	連続的な電荷分布の作用	70
29.2	電荷分布と場の相互作用	71
30	一般的な作用原理	72
30.1	作用原理と場の方程式の形式	72
30.2	場の方程式の非独立性	73
31	重力場のエネルギー擬テンソル	74
32	擬テンソルの具体的な表式	76
33	重力波	77
33.1	弱い重力波の近似	77
33.2	平面重力波	78
34	重力波の偏り	80
34.1	重力波が運ぶエネルギー	80
34.2	重力波の偏り	80
35	宇宙項	82