1　特殊相対性理論

1.1　時空座標

座標変換において，時間と空間座標が入り混じることが相対性理論の特徴です。運動の記述において，ニュートン力学では $x = x(t)$ のように常に独立変数としてあつかわれた時間が，相対性理論においてはその特権的地位をゆずって，空間座標と同等のものとしてあつかわれることになります。

$$x = (x^\mu) = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

とおくことは，このあとの 4 次元のベクトル・テンソルの表現において欠かせない記法です。$x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ とまとめることで座標の 4 つの成分を同時に表現し，これが時空における点，すなわち「事象」を表すことになります。また，添字の ”バランス ”は反変成分・共変成分の縮約という手続きにおけるバランスを意味していますが，これはテンソルのあつかいを理解することでいずれ明らかになるでしょう。

時間座標 $x^0 = t$ と空間座標 $(x^i) = (x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3)$ を同等にあつかうためには，その単位を一致させなければなりません。すべてを長さとして表現するなら，光速 c により $x^0 = ct$ とするべきですが，光速を 1 とする単位系をとることで文字数を節約しています。この単位系はたとえば次のようなものです。

　時間：[秒]
　長さ：[光秒] ＝光が真空中で 1 [s] 間に進む距離＝ c [m]

または，

　時間：[光進時メートル] ＝光が 1 [m] を進む時間＝ c^{-1} [s]
　長さ：[メートル]

いずれも実用的な単位ではないので，具体的な適用の際には c を補ってやればよいでしょう。

1.2　ベクトルと座標の計量

3 次元空間におけるベクトルは，$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ のように 3 つの座標成分をもつ量として考えられますが，3 次元ベクトルの最も基本的な例が変位ベクトル $d\boldsymbol{x} = (dx, dy, dz)$ です。もちろん変位は一般に d のついた微小量である必要はないのですが，一般相対性理論においては特に「曲がった」時空における記述をしなければならないという要請から，ある時空点における変位がその時空点に付随した物理量とどう関係しているかを記述する上では，微小量のみが意味をなすことになります。一般相対性理論の簡明な表現が微分形であるのは，いわば必然的な要請によるものです。

さて，ベクトルのさらに本質的な定義は，空間における長さが座標変換において不変であるという点に求められます。三平方の定理が成り立つ 3 次元ユークリッド空間においては，変位の大きさ ds は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

と書くことができますが，これは始点と終点の間の距離を表し，座標系の平行移動や回転といった変換において変わることがない不変量（スカラー）です。同様にベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ において，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} &= a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \\
\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} &= b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
\end{aligned}$$

はそれぞれ，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の大きさ 2 乗あるいはスカラー積（内積）という不変量を表します。

同様にして，特殊相対性理論であつかう時空（平坦な，いわゆるミンコフスキー時空）における変位の大きさ ds は，

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

であるとし，これを不変量として保つ変換がローレンツ変換であるというわけです。この形式を時空の計量といいます。計量を

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

とする形式もありますが，符号を $(+,-,-,-)$ にするか $(-,+,+,+)$ にするかは統一されていればどちらでもよく，それぞれ一長一短あるようです。たとえば，前者は s が固有時に一致する点，後者は 3 次元ユークリッド空間の距離との類推が容易な点などが長所としてあげられますね。

1.3　反変ベクトル・共変ベクトル

さて，3 次元空間と同様に，4 次元時空におけるベクトル（4 元ベクトル）を考えます。座標変換において dx^μ と同じ変換をするのが反変ベクトル A^μ で，その大きさは

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A, A)$$

の平方根で与えられるとします。(A, A) は内積であり，3 次元空間の $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ に相当します。

A^μ に対して添字を下げたベクトルを

$$(A_\mu) = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$$

で定義して，これを共変ベクトルといいます。しかし，この 2 つは同じベクトル A の 2 種類の成分とみることができて，その意味では A^μ を反変成分，A_μ を共変成分ともいいます。共変成分の意味はとりあえず，

$$(A, A) = A^\mu A_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu A_\mu$$
$$(A, B) = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu B^\mu$$

という簡明な表記のためにあると考えてさしつかえありません。上下の同じ添字がひとつの項にあらわれたら，4 つの成分にわたって和をとるという約束は，アインシュタインの規約と呼ばれ，テンソルの計算において和をとる記号 Σ を省略し，大変すっきりした表記を可能にします。

1.4　テンソルと縮約

座標変換にともなって，2 つの反変ベクトル A^μ，B^μ の成分の積からなる，16 成分の量 $A^\mu B^\nu$ と同じ変換を受ける量 $T^{\mu\nu}$ が，2 階の反変テンソルです。ちなみに，テンソル $A^\mu B^\nu$ は A^μ と B^μ の外積とも呼ぶということですが，3 次元ベクトルのベクトル積を外積ということもあるので，混同しないようにしましょう。ベクトル積（$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$）に対してテンソル積（$A \otimes B$）あるいは直積と呼ぶこともあります。

同様にして 2 階の共変テンソル，混合テンソル，さらに高階のテンソルが定義されます。スカラーは 0 階のテンソルで成分は 1 個，ベクトルは 1 階のテンソルで成分は 4 個です。n 階のテンソルは 4^n 個の成分をもつ量になり，一般の高階テンソルを成分で書き下ろすことは大変です。しかし，2 階テンソルは行列で表示することが可能です。

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 & B^1 & B^2 & B^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^0B^0 & A^0B^1 & A^0B^2 & A^0B^3 \\ A^1B^0 & A^1B^1 & A^1B^2 & A^1B^3 \\ A^2B^0 & A^2B^1 & A^2B^2 & A^2B^3 \\ A^3B^0 & A^3B^1 & A^3B^2 & A^3B^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\mathsf{T} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}
$$

混合テンソルの上下の添字をそろえて和をとると，テンソルの階数が 2 だけ下がります。この操作を縮約といいます。縮約は上下の添字についてのみ許されます。そうすることで自動的に，縮約後の量がまたテンソルに

なることが保証されるのです。

$$
\begin{aligned}
T^{\mu}{}_{\mu} &= T^{0}{}_{0} + T^{1}{}_{1} + T^{2}{}_{2} + T^{3}{}_{3} \\
T^{\mu}{}_{\rho} U^{\rho}{}_{\nu} &= T^{\mu}{}_{0} U^{0}{}_{\nu} + T^{\mu}{}_{1} U^{1}{}_{\nu} + T^{\mu}{}_{2} U^{2}{}_{\nu} + T^{\mu}{}_{3} U^{3}{}_{\nu}
\end{aligned}
$$

1 番目の例では 2 階混合テンソルの縮約でスカラーになり，2 番目の例では 2 階混合テンソルの積（4 階混合テンソル）の縮約で 2 階混合テンソルを生成しています。後者は，行列表示では行列 T（前の T とは成分が異なります）と U の積となります。ちなみに，添字の上げ下げは特殊相対性理論の範囲では反変ベクトルと共変ベクトルの関係と同様に成分の符号を変えるだけで，例えば，$T^{0}{}_{1} = T_{01} = -T_{0}{}^{1} = -T^{01}$ などとなります。

1.5　テンソル方程式

ニュートン力学の法則がベクトル方程式であることは，空間の一様・等方性を前提として，法則が平行移動や回転といった座標変換に対して不変であることを自動的に表現しています。同様に，相対性理論による法則の表現はテンソル方程式であることが要請されます。そうすることによって，法則が時空の座標変換（特殊相対性理論の範囲ではローレンツ変換）に対して形を変えない（共変的である）ことが自動的に保証されるのです。

テンソル方程式の基本として，粒子（質点）の運動方程式を与えておきましょう。ニュートン力学の形式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

を書き換えることを考えます。まず，

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = mc\frac{d\boldsymbol{x}}{dx^0}$$

はこのままではテンソル（4 元ベクトル）の空間成分とはなりえません。$d\boldsymbol{x}$ は 4 元変位の空間成分なのですが，それを dx^0 で割っていることに問

題があるのです。そこで dx^0 をミンコフスキー時空のスカラー（0 階テンソル）である固有時の経過 $d\tau$（テキストの時空距離 ds と同じものですが，ニュートン力学との間の類推を容易にするためにあえて $d\tau$ を使いましょう）に置き換えます。時間成分も加えて

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

とすれば 4 元ベクトル（1 階テンソル）となります。これを 4 元速度といいます。ミンコフスキー時空での成分は，

$$(u^\mu) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}) \qquad \text{ただし，} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\boldsymbol{v}}{c}$$

となります。ここでは混乱を避けるために c を補いました。

さて，ここを突破すればテンソル方程式までは一直線です。まず，4 元速度を用いて 4 元運動量

$$p^\mu \equiv m_0 c u^\mu$$

が定義され，これをさらに τ で微分して

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

とすれば，テンソル方程式（4 元ベクトル方程式）のできあがり。結果的に右辺の 4 元力の空間成分は，ミンコフスキー時空では $\gamma\boldsymbol{f}/c$ に一致します。

4 元ベクトル・テンソルやそれらの方程式の形式は，平坦なミンコフスキー時空に限らず，曲がった時空においても多少の変更を経て引き継がれます。特殊相対性理論による力学，電気力学を復習しておきたいところですね。

練習問題

1-1　時空距離 ds が光速を 1 とする単位系において固有時の経過

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

に一致し，また，4 元速度の成分が

$$(u^\mu) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta})$$

となることを示せ。

1-2　4 元運動量 $(p^\mu) = (E/c, \boldsymbol{p})$ が時空のベクトルであることを示し，$p^\mu p_\mu$ がスカラーとなることから，粒子のエネルギーに関する公式

$$E = \sqrt{{E_0}^2 + \boldsymbol{p}^2 c^2} \qquad （E_0\text{は静止エネルギー}）$$

を導け。

ヒント：$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2, \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \gamma m_0 \boldsymbol{v}$

1-3　電磁場を表すテンソルは，行列表記で

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。荷電粒子の運動方程式がこの電磁テンソルを用いて，

$$\frac{dp^\nu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

となることを確かめよ。

※　上記の電磁テンソルは 23 節で定義されるものと符号が逆だが，この定義も一般に多く用いられている。