10　共変微分

10.1　平行移動と共変微分

共変微分の意義の理解へとせまるために，2 つの方向性があると思います。ひとつめは，テンソル量の変化をはかる基準をどこにおけばよいのかということからせまる方向，ふたつめは法則の記述にテンソル量が必要であることを認めた上で微分演算をどうテンソル化するかということからせまる方向です。

3 次元ユークリッド空間を舞台とするニュートン力学では，スカラーおよびベクトルを含む 3 次元テンソル量の位置的変化および時間的変化がテーマとなっています。一方，4 次元時空においては時間も空間座標と同等のあつかいを受け，全てを時空の幾何学として記述するために,「時間的変化」も時空内の場の変化として表されることになるのですね。そこでは,時空内の 4 次元テンソル量の変化が主要なテーマであることになります。

さて，曲がった時空におけるテンソルの変化を追う上で基本となるのは 4 元ベクトルの変化です。曲がった空間上の曲線座標が私たちの舞台になりますから，その上で定義されたベクトルの変化を正しく追うためには,成分の変化を追うだけでは十分でありません。なぜなら成分の基準をなす座標軸自体が曲がっているからです。私たちは座標軸方向の単位ベクトルすなわち基底の変化をも考慮しなければならないのです。そこで変化に対する基準となるのが平行移動の概念です。つまり，自身に対して平行移動されたベクトルからどれだけ変化したかを考えればよいということになります。したがって時空上で位置が dx だけ変化したとき，4 元ベクトル A_μ の実質的変化は

$$A_\mu(x+dx)-[A_\mu(x)+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha dx^\nu]=(A_{\mu},_{\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha)dx^\nu$$

となります。そこで A_μ の共変微分を

$$A_{\mu:\nu}\equiv A_{\mu},_{\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha$$

と定義することになるのです。テンソル一般の共変微分は，本文にあるようにテンソル積の共変微分に対して，通常の積の微分に関する公式を拡張するだけで終わりです。

10.2 微分係数のテンソル化

さて，共変微分へのもうひとつの接近は，微分演算をいかにテンソル化するかということです。本文にあるように

$$\begin{aligned} A_{\mu',\nu'} &= (A_\rho x^\rho{}_{,\mu'})_{,\nu'} \\ &= A_{\rho,\sigma}\, x^\sigma{}_{,\nu'}\, x^\rho{}_{,\mu'} + A_\rho x^\rho{}_{,\mu'\nu'} \end{aligned}$$

の第 2 項の存在が座標による微分を似非テンソルにしています。そこで第 2 種クリストッフェル記号の変換

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = x^{\lambda'}{}_{,\alpha}\, x^\beta{}_{,\mu'}\, x^\gamma{}_{,\nu'}\, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + x^{\lambda'}{}_{,\sigma}\, x^\sigma{}_{,\mu'\nu'}$$

に $x^\rho{}_{,\lambda'}$ をかけて

$$x^\rho{}_{,\lambda'}\, \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = x^\beta{}_{,\mu'}\, x^\gamma{}_{,\nu'}\, \Gamma^\rho_{\beta\gamma} + x^\rho{}_{,\mu'\nu'}$$

とし，右辺の $x^\rho{}_{,\mu'\nu'}$ を微分した式の第 2 項に代入すれば，

$$\begin{aligned} A_{\mu',\nu'} &= A_{\rho,\sigma}\, x^\sigma{}_{,\nu'}\, x^\rho{}_{,\mu'} + A_\rho (x^\rho{}_{,\lambda'}\, \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} - x^\beta{}_{,\mu'}\, x^\gamma{}_{,\nu'}\, \Gamma^\rho_{\beta\gamma}) \\ &= A_{\rho,\sigma}\, x^\sigma{}_{,\nu'}\, x^\rho{}_{,\mu'} + A_{\lambda'} \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} - x^\beta{}_{,\mu'}\, x^\gamma{}_{,\nu'}\, \Gamma^\rho_{\beta\gamma} A_\rho. \end{aligned}$$

したがって，

$$A_{\mu',\nu'} - \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} A_{\lambda'} = x^\rho{}_{,\mu'}\, x^\sigma{}_{,\nu'}\, (A_{\rho,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} A_\alpha)$$

となって，テンソルとして変換する共変微分の形式が得られました。

なお，基本テンソル $g_{\mu\nu}$ が共変微分に対して「定数なみ」であることは重要です。曲がった空間で場の量（テンソル）の変化を記述するために準備されたのが共変微分ですから，空間の曲がりそのものを表現する基本テンソルが共変微分の演算を受けない（受けると 0 になる）ことは，つじつまが合っているように思えます。

10.3　時空の幾何学の数学的道具

さて，ここまでで私たちは，重力によって曲がった時空を舞台とする物理法則を記述するために必要な数学的道具を，ひととおりそろえたということができます。ニュートン力学との比較において整理してみると，次のようになるでしょうか。

ニュートン力学　→　物理法則は空間テンソルの微分方程式

舞　台　平坦な 3 次元空間
時間変化を問題にするとき時間は独立変数

物理量　3 次元テンソル（スカラー，ベクトルを含む）

微　分　空間変化→座標による微分
時間変化→時間による微分

一般相対性理論　→　物理法則は時空テンソルの微分方程式
＝　曲がった時空の幾何学

舞　台　曲がった 4 次元時空
時間変化は時空間上の変化に包含

物理量　4 次元テンソル（スカラー，ベクトルを含む）

微　分　時空座標による共変微分

スカラー場に対するダランベールの方程式は，ミンコフスキー時空では

$$
\begin{aligned}
\Box V &= \eta^{\mu\nu} V_{,\mu\nu} \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \triangle V = 0
\end{aligned}
$$

すなわち波動方程式となりますが，平坦な時空の基本テンソル $\eta^{\mu\nu}$ を $g^{\mu\nu}$ にとりかえて，微分を共変微分にすれば曲がった時空に拡張できるわけで

す。すなわち，

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}V_{:\mu:\nu} &= g^{\mu\nu}(V_{:\mu})_{:\nu} = g^{\mu\nu}(V_{,\mu})_{:\nu} \\
&= g^{\mu\nu}(V_{,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha}) = 0
\end{aligned}
$$

とすればよいことになります。

　ちなみに，スカラー場に対するダランベールの方程式の例としては，ローレンツゲージにおいて真空中のマックスウェル方程式の電場に関する 2 式をスカラーポテンシャル ϕ でひとつにまとめた

$$
\Box\phi = 0
$$

が代表的です。もちろん共変形は上と同じ形になります。

練習問題

10-1　第 1 種クリストッフェル記号の変換は，

$$
\Gamma_{\alpha'\beta'\gamma'} = x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, \Gamma_{\mu\nu\sigma} + x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}\, g_{\mu\nu}
$$

で与えられる（練習問題 **7-1** 参照）。添字をひとつ上げることにより，第 2 種クリストッフェル記号の変換を導け。

10-2　反変ベクトルの共変微分

$$
A^{\mu}{}_{:\sigma} = A^{\mu}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}A^{\nu}
$$

が，座標変換 $x^{\mu} \to x^{\alpha'}$ に対して 2 階の混合テンソルとして正しく変換することを確かめよ。