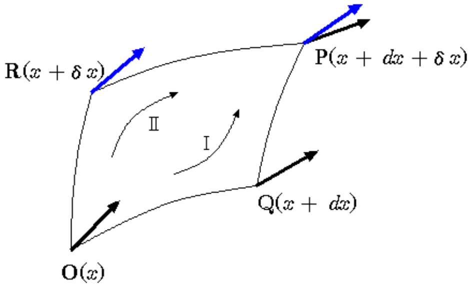
11　曲率テンソル

11.1　共変微分の非可換性

2 回連続した共変微分の結果が，微分の順序によって異なる原因は，共変微分と平行移動との関係に見出すことができます。

ベクトル場を共変微分するとき，変化の基準を平行移動したベクトルにおきましたが，平行移動の結果自体が移動の経路に依存して変わるために，連続した共変微分の結果は経路すなわち微分の順序によって異なることになるのです。



点 $\mathrm{O}(x)$ から点 $\mathrm{P}(x+dx+\delta x)$ への平行移動をするとき，

$$\text{経路 I：} \mathrm{O}(x) \to \mathrm{Q}(x+dx) \to \mathrm{P}(x+dx+\delta x)$$
$$\text{経路 II：} \mathrm{O}(x) \to \mathrm{R}(x+\delta x) \to \mathrm{P}(x+dx+\delta x)$$

の二つの微小経路に沿って実行した結果を比べてみましょう。

まず，経路 I に沿った平行移動の結果は，2 次の微小量までとると次のようになります。

$$\begin{aligned} A_{\parallel\mu}(\mathrm{P{:}I}) &= A_{\parallel\mu}(\mathrm{Q}) + \mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathrm{Q})A_{\parallel\lambda}(\mathrm{Q})\delta x^{\nu} \\ &= A_{\mu} + \mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda}dx^{\nu} + \left(\mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} + \mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma}dx^{\sigma}\right)\left(A_{\lambda} + \mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\beta}A_{\alpha}dx^{\beta}\right)\delta x^{\nu} \\ &= A_{\mu} + \mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda}dx^{\nu} + \mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda}\delta x^{\nu} + (\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} + \mathit{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\beta})A_{\alpha}dx^{\beta}\delta x^{\nu} \end{aligned}$$

ただし，点 O における値を表す (O) は煩雑になるので省略しました。

一方，経路 II に沿った平行移動の結果は，dx と δx を交換して

$$A_{\parallel\mu}(\mathrm{P{:}II})$$

$$= \quad A_\mu + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \delta x^\nu + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda dx^\nu + (\Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu}) A_\alpha dx^\beta \delta x^\nu$$

となります。そこで両者の差をとると，

$$A_{\parallel\mu}(\mathrm{P{:}I}) - A_{\parallel\mu}(\mathrm{P{:}II}) = R^\alpha_{\mu\beta\nu} A_\alpha dx^\beta \delta x^\nu$$

という結果を得ます。これが共変微分の非可換性のもとになっているわけですね。

11.2　曲率テンソルの対称性

曲率テンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の対称性を列挙すれば，

(1)　(μ, ν) について反対称
(2)　(ρ, σ) について反対称
(3)　$(\mu\nu, \rho\sigma)$ について対称
(4)　(ν, ρ, σ) をサイクリックに置換したものの和が 0

となります。これにしたがって，独立な成分の個数を求めてみましょう。

(i)　添字がすべて同じ場合

4 成分ありますが，(1) または (2) によりすべて 0 です。

(ii)　添字が 3 つだけ同じ場合

$4 \times 3 \times 4 = 48$ 成分ありますが，これも前 2 つか後ろ 2 つのいずれかが必ず同じになりますから，(1) または (2) によりすべて 0 です。

(iii)　2 つ同じ添字が 2 組ある場合

$4 \times 3 \times 3 = 36$ 成分のうち，$4 \times 3 = 12$ 個は前 2 つ，後ろ 2 つが同じで 0。あとの 24 個は (1)(2)(3) により，2 つの添字○×について

$$R_{\bigcirc\times\bigcirc\times} = R_{\times\bigcirc\times\bigcirc} = -R_{\bigcirc\times\times\bigcirc} = -R_{\times\bigcirc\bigcirc\times}$$

の関係をもつため，独立な成分は 6 個となります。

(iv)　添字が 2 つだけ同じ場合

$4\times3\times2\times6=144$ 成分のうち，前 2 つまたは後ろ 2 つが同じものが $4\times3\times2\times2=48$ 個あって，これらはすべて 0。残り 96 個は (iii) と同様の関係から 8 成分ずつ関係する組をなしていて，独立な個数は 12 個になります。

(v)　添字が全部異なる場合

$4\times3\times2=24$ 成分ありますが，最初の添字が 0 のもの 6 つは $R_{0123}=-R_{0132}$ に対して

$$R_{0123}+R_{0231}+R_{0312}=0, \qquad R_{0132}+R_{0321}+R_{0213}=0$$

の 2 グループをなしており，独立なものは 2 個。また，この 2 個から (1)(2)(3) を用いた対称な置換で最初の添字が 1，2，3 のものに移ることができますから，結局独立な成分は 2 個だけです。

以上を合計すると，$4^4=256$ 成分のうち 0 でない独立な成分は

$$6+12+2=20 \text{ 個}$$

あることになります。

　以上は，4 次元の曲率テンソルの一般的な定義から出てくる対称性によるものであり，さらに対象となる空間に例えば球対称のような対称性があれば，独立な成分の個数はさらに限られることになるでしょう。

練習問題

11-1　2 次元曲面における曲率テンソルの独立な成分の個数を求めよ。また 3 次元空間ではどうか。

11-2　緯度 θ，経度 ϕ を座標とする半径 R の球面座標 $(x^1,x^2)=(\theta,\phi)$ に対して，曲率テンソルを求めよ。