12　空間が平らであるための条件

12.1　曲率テンソルと平坦性

この節の内容すなわち「空間の平坦性」と「曲率テンソルゼロ」の同値性を，数学的な厳密さを保ってわかりやすく説明することは，手に余るというのが正直のところです。しかし，私たちの目的としては，ひとまずなるほどと思えるほどに大づかみできればいいので，ここでは最も簡単な具体例で追試することで理解に努めたいと思います。2 次元平面上にとられた極座標 (r,ϕ) に対して，曲率テンソルゼロから平面の平坦性を導いてみることにしましょう。

まず，基本テンソルをはじめとする，計算に必要な量のゼロでない成分を列挙すれば，計量 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ から

$$
\begin{array}{lcll}
g_{\mu\nu} & : & g_{11} = 1, & g_{22} = r^2 \\
g^{\mu\nu} & : & g^{11} = 1, & g^{22} = 1/r^2 \\
g_{\mu\nu,\rho} & : & g_{22,1} = 2r & \\
\Gamma_{\mu\nu\rho} & : & \Gamma_{122} = -r, & \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = r \\
\Gamma^{\beta}_{\nu\rho} & : & \Gamma^{1}_{22} = -r, & \Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = 1/r \\
\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} & : & \Gamma^{1}_{22,1} = -1, & \Gamma^{2}_{12,1} = \Gamma^{2}_{21,1} = -1/r^2 \\
\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} & : & \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{22} = -1 &
\end{array}
$$

となります。これを用いて曲率テンソルを計算すると，確かにすべて 0 になるようですね。

さて，(12.2) は

$$\begin{aligned}
&S_{,11} = 0 && \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = 0 \\
&S_{,12} = S_{,21} = \mathit{\Gamma}^2_{12} S_{,2} && \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial r \partial \phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi} \\
&S_{,22} = \mathit{\Gamma}^1_{22} S_{,1} && \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = -r\frac{\partial S}{\partial r}
\end{aligned}$$

なる連立偏微分方程式となるわけですが,

$$S_{(1)} = r\cos\phi, \qquad\qquad S_{(2)} = r\sin\phi$$

が解になっていることは容易に確認できて，これはまさに平面直交座標にほかなりません。この場合,

$$\begin{aligned}
x^1 &= r\cos\phi, \quad dx^1 = dr\cos\phi - r\sin\phi\cdot d\phi \\
x^2 &= r\sin\phi, \quad dx^2 = dr\sin\phi + r\cos\phi\cdot d\phi
\end{aligned}$$

から直接,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

が得られて，基本テンソルが定数になることが確認できます。

以上で大まかな流れとしては本節の展開が理解できたのではないでしょうか。

練習問題

12-1 平面極座標において，曲率テンソルが 0 になることを確かめよ。

12-2 平面上の斜交軸による座標が上の偏微分方程式の解であることを確かめよ。

12-3 半径 ρ の球面上にとられた 2 次元極座標における曲率テンソルを求めよ。