13　ビアンキの関係式

13.1　測地座標系

本文の展開で，ビアンキの恒等式 (13.4) を導出する過程は十分にエレガントですっきりしたものなので，巡回置換をずらして計算する (13.2) のプロセスがややこみいっているものの，これといって解説の必要な部分はないと思われます。自分でじっくり計算を追跡してみてください。

ビアンキの恒等式を証明する簡便な方法として，測地座標系というものが使われることがあります。これについて本文では触れていませんが，計算手段としてだけでなく概念としても重要なので，ここで学んでおきたいと思います。

曲がった空間（曲面）では，その空間そのものやその中における場の量の変化を調べるために，私たちは曲線座標をとることを余儀なくされました。しかし，空間の曲がりがなめらかなものであるならば，私たちは空間内の任意の点において局所的に直線座標をとることができます。その「直線」は，へばりついたアメーバにとっての直線すなわち測地線にほかなりません。その意味からこの局所直線座標系は測地座標系ともいわれます。直線座標では $\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma}$ の全成分が 0 になります。つまり，任意の点で測地座標系がとれるということは，適当な座標変換をすることによって局所的に接続係数を 0 にすることができるということです。

練習 **10-1** により，第 2 種クリストッフェル記号の逆変換は

$$\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma} = x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\beta'}{}_{,\nu}\, x^{\gamma'}{}_{,\sigma}\, \mathit{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} + x^{\mu}{}_{,\beta'}\, x^{\beta'}{}_{,\nu\sigma}$$

となります。したがって，ある点 P の接続係数が

$$\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma}(\mathrm{P}) = x^{\mu}{}_{,\beta'}\, x^{\beta'}{}_{,\nu\sigma}\Big|_{\mathrm{P}}$$

と書けるような座標系 (x') を選べば，変換後の接続係数は

$$\mathit{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(\mathrm{P}) = 0$$

と局所的に 0 になります。このとき，(x') は測地座標系となるわけです。ちなみに，座標系の選択によって 0 になったりならなかったりするというのは，まさにクリストッフェル記号がテンソルでないことを再び示すものですね。

さて，こうして選んだ測地座標系をあらためてプライムをとって表します。すると曲率テンソルの微分は

$$R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma,\rho\tau} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho,\sigma\tau}$$

と積の項がなくなって簡単になります。接続係数の微分は一般に 0 にならないこと，また共変微分は通常の微分に等しくなることに注意してください。(ρ, σ, τ) を巡回置換して得られる式の和をとれば，ただちに目的の恒等式が得られます。そして，この恒等式はテンソルの関係式なので，座標変換において形を変えることがないため，一般の曲線座標系においても成立することが保証されているというわけです。

ところで，曲がった 4 次元時空において測地座標系とは何を意味するのでしょうか？ 重力以外にどんな力も受けない自由粒子の世界線は，時空の時間的測地線であるというのが私たちのおいた仮定でした（8 節参照）。したがって自由粒子とともに動く座標系は，時間的測地線を x^0 軸とする測地座標系であることになります。すなわち局所慣性系（局所ローレンツ系）は，時空の測地座標系にほかなりません。

練習問題

13-1　座標変換 $(x) \to (x')$ が，

$$(x' - x'_{\mathrm{P}})^{\lambda} = (x - x_{\mathrm{P}})^{\lambda} + \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathrm{P})(x - x_{\mathrm{P}})^{\mu}(x - x_{\mathrm{P}})^{\nu}$$

で表されるとき，新しい座標系 (x') は点 P における測地座標系となることを確かめよ。