14　リッチ・テンソル

14.1　リッチ・テンソルとスカラー曲率

曲率テンソルを縮約したものがリッチ・テンソル，さらにもう一度縮約したものがスカラー曲率ということになります。定義は明瞭ですのでとりたてて説明の必要はないと思います。ここでは，曲率テンソルにかかわる定義と符号の関係について触れておきます。さて，曲率テンソルの定義は

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}$$

でしたが，これを次のように定義する場合もみられます。

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}$$

おわかりのように，(ρ,σ) の置換されたものですから，互いに符号が逆になる定義です。

また，リッチ・テンソルの定義

$$R_{\nu\rho} = R^{\mu}_{\nu\rho\mu}$$

についても，

$$R_{\nu\rho} = R^{\mu}_{\nu\mu\rho}$$

と縮約するもうひとつの定義がみられます。この場合も曲率テンソルの性質から明らかなように，互いに符号が逆転します。混同さえしなければどちらでもかまわないのですが，符号が変わることだけ了解しておく必要があります。

そこで本文の，スカラー曲率（全曲率）は「3 次元の球面に対して正となるように定義されている」という部分ですが，一般の曲面論では，ガウスの曲率 K と呼ばれるものを全曲率ということが多く，球面に対して

$K > 0$ と定義されています。そして，普通に計量を $ds^2 > 0$ として計算した場合に，スカラー曲率 R との関係は 2 次元球面で $R = -2K < 0$ となるのです。しかし本書では基本テンソルの符号については，はじめに定義したミンコフスキー計量のものを継承しており，空間 3 次元については $ds^2 < 0$ になるようにとっていると解釈できます。そうすれば基本テンソルの符号が逆転しますから，球面のスカラー曲率も正になるはずですね。

あえて「3 次元」の球面といっているのは，4 次元内の 3 次元超球面の意味であるかもしれませんが，符号に関する事情は同じです。これまでの練習問題では，時間を含まない単純な空間（曲面）に関しては，この符号の継承はせずにすべて $ds^2 > 0$ としていますので，あしからずご了承ください。

14.2　リッチ・テンソルの対称性

ビアンキ恒等式の縮約形 (14.3) の導出は追跡が容易だと思いますが，リッチ・テンソルをクリストッフェル記号で書き下ろした (14.4) から，対称テンソルであることを証明するくだりでやや難解な部分があるので補足しておきたいと思います。

「行列式 g を微分するのには，行列の各要素 $g_{\lambda\mu}$ を微分して余因子 $gg^{\lambda\mu}$ をかけるのであった.」と本文にはありますが，これは他のどの部分でも説明されてはおらず，ディラックは (14.5) を自明の公式のようにあつかっています。この (14.5) を導出しておきましょう。以下，ひとまずアインシュタインの規約は解除して，ひとつの項に同じ添字が現れても和はとらないことにします。

まず，$g^{\lambda\mu}$ は $g_{\lambda\mu}$ の逆行列の関係になっていますから，

$$g^{\lambda\mu} = \frac{1}{g} \times \mathcal{G}_{\lambda\mu}, \qquad \mathcal{G}_{\lambda\mu} \equiv (-1)^{\lambda+\mu} \Delta_{\lambda\mu}$$

と書けます。ここに，$\Delta_{\lambda\mu}$ は行列 $g_{\lambda\mu}$ から λ 行 μ 列をのぞいた小行列式を意味し，したがって $\mathcal{G}_{\lambda\mu}$ は $g_{\lambda\mu}$ のいわゆる余因子であるとします。とこ

ろで，行列式 g を第 λ 行によって展開すると，

$$g \equiv \| g_{\lambda\mu} \| = \sum_{\mu} (g_{\lambda\mu} \times \mathcal{G}_{\lambda\mu})$$

となりますから，これを $g_{\lambda\mu}$ で微分すると

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\mu}} = \mathcal{G}_{\lambda\mu} = g g^{\lambda\mu}$$

を得ます。これを用いて，

$$g_{,\nu} = \sum_{\lambda,\mu} \left(\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\mu}} \cdot \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} \right) = g g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu,\nu}$$

と目的の公式が導かれます。最後にアインシュタインの規約復活です。最後の段は，$g < 0$ であることに注意すれば，問題なく理解できますね。

練習問題

14-1　次の公式を導け。

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\lambda\mu}} = -g g_{\lambda\mu}$$

14-2　**12-3** の結果を用いて，2 次元球面のリッチ・テンソル $R_{\mu\nu}$ およびスカラー曲率 R を求めよ。