16　ニュートン近似

16.1　静的な重力場と静的な座標系

私たちは，$R_{\mu\nu}=0$ という見た目には単純だけれどもその実おそろしくいりくんだ方程式を，現実の重力場に適用するために，これからあらん限りのぜい肉落としにかかります。まず，時間的に変化しない静的な重力場を静的な座標系によって扱おうというのですが，この制限を式で表現すると

$$g_{\mu\nu,0}=0, \qquad g_{m0}=0$$

となります。静的な重力場を意味する第 1 式は自明ですが，第 2 式の意味は直感的には理解しかねますね。「静的な座標系」という制限からくる $g_{m0}=0$ をせめて直感的に類推できるようにすることから始めましょう。

さて，重力以外に力を受けない自由粒子（自由落下粒子といった方がいいでしょうか）の運動方程式は，時間的な測地線方程式 (8.3) として与えられるのでした。すると，粒子の 4 元加速度は

$$\begin{aligned}\frac{dv^m}{ds} &= -\Gamma^m_{\nu\sigma}v^\nu v^\sigma \\ &= -(\Gamma^m_{00}v^0v^0+2\Gamma^m_{0n}v^0v^n+\Gamma^m_{ns}v^nv^s)\end{aligned}$$

と与えられます。もちろん，m,n,s はいわゆる空間成分を表す 1,2,3 の値をとります。(　　) 内の第 1 項は，ニュートン近似で残る正真の重力といえます。第 2・3 項は何を意味するのでしょうか？

私たちの出発点である「等価原理」が解釈のカギとなります。つまり，第 1 項が正真の重力を表すとするなら，残りは重力と原理的には区別できない慣性力を表現していると考えてよいのです。なるほどいわれてみれば，第 2 項は速さに比例するコリオリ力，第 3 項は速さ 2 乗に比例する遠心力に見えてきませんか？　第 2 項の因数 Γ^m_{0n} を 0 とする制限は，$g_{\mu\nu,0}=0$ を

先行させれば $g_{m0}=0$ に通ずるのです。わかりやすくいえば，g_{m0} は座標系に対する時空の回転を表現しており，適当な座標系の選択によってそれを無視できるような場合を考えるということですね。また，第 3 項は速度を小さいとする近似によって省略される運命にあります。慣性系にとらわれない自由な座標選択を許す一般相対性理論においては，慣性力は重力とともに基本テンソルの中に組み込まれることを肝に銘じておきましょう。

これまでの「静的」な近似によって，まず基本テンソルが多少整理されました。行列表示によれば,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

となり，空間部分が独立して g^{mn} が g_{mn} の逆行列となります。なおかつ $g_{\mu\nu,0}=0$ はクリストッフェル記号をずいぶん簡略化してくれます。

16.2　基本テンソルと重力ポテンシャル

「静的」な近似に加えて，速度 $v^m \equiv dx^m/ds$（私たちの単位系では無次元量でミンコフスキー時空の β^m に相当します）を 1 次の微小量とする近似では，前述の慣性力を取り去ることができて，その結果 (16.3)

$$\frac{dv_m}{dx^0} = ({g_{00}}^{1/2})_{,m}$$

を得るわけです。一方ニュートン力学では，ポテンシャルを V（ただし，通常のポテンシャルを c^2 で割ったもので無次元量）として

$$\frac{dv^m}{dx^0} = V_{,m}$$

と書けますから，重力場が十分弱く $V \ll 1$ でかつ $g_{00} \simeq 1$ とする近似のもとで両者を比較して，(16.6)　$g_{00} = 1 + 2V$ を得ます。

さあ，続いて場の方程式は何を教えてくれるのでしょう？　ここではさらに，重力場が弱くて時空の曲率が微小であるという近似を持ち込みます。実は，これだけ荒い近似のもとでは $R_{\mu\nu}=0$ は g_{00} に対するラプラスの方程式に帰着し，まさに g_{00} がポテンシャル V（の 1 次関数）に相当することを追認するのみです。もちろんこれは大変重要な結果で，特殊相対性理論において速さが光速に比べて十分小さいときに，その力学がニュートン力学に帰着したように，一般相対性理論においては，弱くて静的な重力場の場合には，同様の移行が成立するということです。

最後に，ニュートン力学でよく知られた重力ポテンシャルと対応させれば,

$$V = {g_{00}}^{1/2} - 1 = -\frac{GM}{rc^2}$$

となるので，結局

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

の結果を得ます。

練習問題

16.1　$g_{m0}=0 \quad (m=1,2,3)$ のとき，$g^{\mu\nu}$ の成分について

$$g^{00} = 1/g_{00}, \quad g^{m0} = 0$$
$$g^{mn}\text{は } g_{mn}\text{の逆行列}$$

となることを示せ。