18　シュヴァルツシルトの解

18.1　球対称重力場

重力場の方程式の静的で球対称な解が，シュヴァルツシルトの時空です。これまで学んだリーマン幾何学のテンソル計算をいよいよ時空に適用します。なかなか骨の折れる計算ではありますが，注意深く本文の導出過程を追跡すれば，そう悩むところはないでしょう。$g_{00} = e^{2\nu}, g_{11} = -e^{2\lambda}$ とおく意義は，導出過程のエレガントさからも納得できますが，重要なのは

$$\lim_{r\to\infty} \nu(r) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} \lambda(r) = 0$$

なる関数 $\nu(r), \lambda(r)$ に対して，

$$\begin{aligned} e^{\nu} &= 1 + \nu + \frac{1}{2}\nu^2 + \cdots \\ -e^{\lambda} &= -(1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \cdots) \end{aligned}$$

と展開できるところにあります。弱い重力場では，$g_{00} \simeq 1$, $g_{11} \simeq -1$ ですから，ミンコフスキー時空とのわずかなずれを ν, λ で表しているわけです。係数の 2 は，単にクリストッフェル記号の計算で出てくる 1/2 のわずらわしさを解消したものですね。指数関数への置き換えなしに，力ずくで解くことも可能ですが，以上の置き換えは見通しのよさと計算の省力化に一役かっています。

18.2　質点の運動

球対称時空における具体的な運動については，シュヴァルツシルト面（$r = 2m$）の特異性に関わって，次節において多少の解析がされているのみです。質点の場合も光の場合も，要するに測地線方程式を積分すること

でその運動を決定することができるわけです。簡明さが本分の Dirac 書の目的からは逸脱するかもしれませんが，球対称と言う特別な場合とはいえ，多くの天体のまわりの時空のよい近似となる計量がせっかく得られたのですから，実験的検証につながる運動の解析に一歩踏み込んでみたいものです。とりあえず，本節でも触れられている「水星の近日点移動」の理論的導出を目標に，ケプラー運動の修正に挑戦しておきましょう。

　まず，運動方程式を導出します。測地線方程式の公式，または計量から直接オイラー方程式を書き下ろすことで各成分に対する方程式を得ます。はじめに θ に対する方程式は,

$$\mu = 2: \quad \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \cdot \dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 = 0$$

となります。ただし，簡略化のため $\dot{r} \equiv dr/ds$ などとしました。ここで初期条件が $\theta = \pi/2, \quad \dot{\theta} = 0$ となるように座標系をとれば，$\ddot{\theta} = 0$ となりますから，$\theta = \pi/2$ が一定に保たれます。すなわち，これは平面運動になることを示しています。以下 $\theta = \pi/2, \quad \dot{\theta} = 0$ とします。続いて，t および ϕ については

$$\begin{aligned}
\mu = 0: &\quad \frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \quad \text{i.e.} \quad \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = k \\
\mu = 3: &\quad \frac{d}{ds}(r^2\dot{\phi}) = 0 \qquad\qquad\quad \text{i.e.} \quad r^2\dot{\phi} = h
\end{aligned}$$

を得ます。k, h は積分定数で，それぞれ単位質量あたりのエネルギーおよび角運動量にあたります。さて r に対する方程式がまだですが，私たちの目的のためには替わりに計量の式を ds^2 で割った次の式が便利です。

$$\begin{aligned}
1 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 \\
&= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}(k^2 - \dot{r}^2) - \frac{h^2}{r^2}
\end{aligned}$$

これを $\dot{\phi}^2 = h^2/r^4$ で割り，$u \equiv 1/r$ と変数変換した上で ϕ で微分すると,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

を得ます。これが質点の軌道方程式ですが，ニュートン力学の結果と比較すると，追加された右辺第 2 項が一般相対論の効果を表しています。

18.3　水星の近日点移動

軌道方程式の解をニュートン力学の結果にならって，

$$u(\phi) = \frac{1}{l}[1 + e\cos(1+\delta)\phi]$$

で近似することができれば，δ が水星の近日点移動を表すことになります。ここに e は離心率，l は軌道の大きさを示すパラメタです。これを再度方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{1}{l}\left[1 + e\{1-(1+\delta)^2\}\cos(1+\delta)\phi\right] \\ \text{右辺} &= \frac{1}{l}\left[1 + \frac{6me}{l}\cos(1+\delta)\phi + \frac{3me^2}{2l}\{1+\cos 2(1+\delta)\phi\}\right] \end{aligned}$$

となります。離心率が十分に小さければ右辺第 3 項は無視できますが，水星では比較的大きいので，本来であれば解を

$$u(\phi) = \frac{1}{l}[1 + \varepsilon_0 + e\cos(1+\delta)\phi + \varepsilon_2\cos 2(1+\delta)\phi]$$

と近似すべきであったことになります。しかし目的の結果は同じなので，さらなる検討は練習問題にゆずってここでは省略します。

さて，上の結果から両辺を比較すると

$$\delta \simeq -\frac{3m}{l}$$

となり，これによって r の変動周期角は 2π から

$$\mathit{\Delta}\varphi \simeq -2\pi\delta \simeq \frac{6\pi m}{l} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)} \qquad (a\ \text{は軌道長半径})$$

だけずれることになります。水星において 100 年で約 43 ″となるこの理論値は，観測値（他の惑星の影響を引いた差）に驚くべき一致をみせ，一般相対性理論の実験的証拠の重要なひとつにあげられているのです。

練習問題

18-1　ニュートン近似の結果 $g_{00} = 1 - 2m/r$ を受け入れた上で，重力場の球対称解（シュヴァルツシルト解）を導出せよ。

18-2　シュヴァルツシルト時空における自由粒子のラグランジアン

$$L = \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}^2)\right]^{1/2}$$

ただし，　$\dot{x} \equiv \dfrac{dx}{ds}$

を用いて，t, θ, ϕ に対するオイラー方程式を書き下ろせ。

18-3　計量 ds^2 の式から軌道方程式を導出する過程を確認せよ。

18-4　軌道方程式の解を

$$u(\phi) = \frac{1}{l}[1 + \varepsilon_0 + e\cos(1+\delta)\phi + \varepsilon_2\cos 2(1+\delta)\phi]$$

とおいて，$\delta, \varepsilon_0, \varepsilon_2$ を決定せよ。