19　ブラック・ホール

19.1　中心に向かって落下する質点

本節の前半は，シュヴァルツシルト面（$r = 2m$）の物理的な性質を調べるために，中心に向かう自由落下すなわち初速 0 の 1 次元運動をあつかっています。前節の解説で述べた運動方程式の最も簡単な場合になりますから，さほど問題になることはないと思いますがいかがでしょうか？
ただし，

$$k^2 - (v^1)^2 = g_{00}$$

の式からあきらかなように,「k は定数で，質点が落ちはじめるときの g_{00} の値に等しい」というのは誤りで，$\sqrt{g_{00}}$ に等しいというべきでしょう。

$r \downarrow 2m$ のとき $t(r) \to \infty$，すなわちシュヴァルツシルト面に達するのに無限の時間を要することを導いていますが，もちろん逆に $\beta \equiv dr/dt \to 0$，すなわち観測される速さが 0 に収束することによっても十分説明できると思います。一方，質点に乗った観測者によれば自らの速さが 0 になることはないわけです。

19.2　シュヴァルツシルト面を超える

シュヴァルツシルト面（$r = 2m$）は，私たちの用いた座標 r, t によればまさに特異点であり，落下物体がそこに達するのに無限の時間を要するというのは，それだけでもただごとでない感じがします。しかし，質点とともに動く座標系ではそうならないことからもわかるように，この特異性は座標 r, t に限られたものであり，自由な座標変換が許される一般相対性理論の上ではみかけ上のものであることが説かれています。みかけの特異点を排除する変換の一例として τ, ρ なる座標が持ち込まれたのですね。

ところで，みかけの特異点はともかくとして，$r < 2m$ においてシュヴァ

ルツシルト解は生き残ることができるのでしょうか？　答えは条件つきでイエスです。計量からすぐにわかるように，g_{00} と g_{11} の符号が逆転します。したがって，t と r の役割が逆転するとみるべきです。$r < 2m$ では，t は空間的座標，r は時間的座標を表すことになるわけです。時間経過の不可逆性は，r の一方的減少の不可逆性にとってかわられます。こうした条件をつけた上で，シュヴァルツシルト解は $r < 2m$ における運動を理論的に説明できます。しかし，それを検証することが不可能であることは理解できますね。

練習問題

19-1　星から無限遠に静止した観測者が，物体を放して自由落下させたとき，星から距離 r まで落下したときに観測される物体の速さ（光速との比）は，

$$\beta(r) \equiv \frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\sqrt{\frac{2m}{r}}$$

となることを示せ。また，この速さの r による変化を概観し，最大となる r を求めよ。

19-2　測地線方程式の積分定数 $k = g_{00}v^0$ が，質点の速さ $\beta \equiv dr/dt$ を用いて

$$k = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - \beta^2/{g_{00}}^2}}$$

と書けることを導け。また，星から十分離れた（$r \gg m$），光速より十分遅い（$\beta \ll 1$）質点に対してこれを近似すると，km_0c^2 がニュートン力学におけるエネルギー（静止エネルギーを含む）に一致することを示せ。ただし，m_0 は質点の質量とする。