2　斜交軸

2.1　斜交軸の計量

一般座標の計量やベクトルのあつかいを，斜交軸において考察しておこうというのが本節の主旨ですが，本文には斜交軸に即した具体化は何らなされておらず，すべてはそのまま一般座標に引き継がれる内容となっています。まず計量の一般的な形式は，

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

となります。ds は「距離」ですから，その 2 乗は変位の成分についての 2 次形式で表されるであろうということです。その係数 $g_{\mu\nu}$ は，一般には位置 x^μ の関数ですが，ユークリッド空間やミンコフスキー時空の場合のように「平坦」な場合には，定数となります。また，$g_{\mu\nu}$ は，その定義において 2 階共変テンソルであることが示されています。なぜなら，2 つの反変ベクトル dx^μ との直積を 2 組の添字において縮約したものがスカラーすなわち 0 階のテンソルになっているからです。

ミンコフスキー時空の直交軸による計量テンソルは，行列表示で

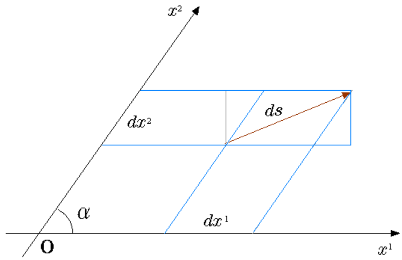
$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書けることはすぐにわかりますね。

計量テンソルは，2 つの添字の交換について対称で，いわゆる対称テンソルであるということにします。例えば，計量 ds^2 において $dx^1 dx^2$ の係数は $g_{12} + g_{21}$ となりますが，これはその座標系においてこの和が定まっていることを意味し，g_{12} と g_{21} にはその和を変えない範囲での任意性が

もともとあるわけです。したがってとりあえずここで決めた $g_{\mu\nu}$ の対称性は，とりあつかい上の便宜にすぎません。時空においては，対称性を認めた上で $g_{\mu\nu}$ の独立な成分は，行列表現における三角成分と対角成分の合計すなわち $(4^2-4)\div 2+4=10$ 個になります。

さて，最も簡単な具体例として，平坦な 2 次元平面上の斜交軸を考えましょう。x^1 軸に対して x^2 軸が反時計回りに α の角度をなしているとします。変位 dx^μ の長さ ds は，



$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (dx^1+dx^2\cos\alpha)^2+(dx^2\sin\alpha)^2 \\
&= (dx^1)^2+2\cos\alpha\cdot dx^1dx^2+(dx^2)^2
\end{aligned}
$$

となりますから，計量テンソルは

$$
(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}
$$

と書けます。

次に上の x^2 軸を x^0 軸に置き換えて，これがミンコフスキー時空上の斜交軸であるとすると，計量は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (dx^0\sin\alpha)^2-(dx^1+dx^0\cos\alpha)^2 \\
&= (\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(dx^0)^2-2\cos\alpha\cdot dx^0dx^1-(dx^1)^2
\end{aligned}
$$

となりますから，計量テンソルは

$$
(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} \sin^2\alpha-\cos^2\alpha & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & -1 \end{pmatrix}
$$

と書けることになります。このとき行列式の値は，

$$
g=|g_{\mu\nu}|=-\sin^2\alpha<0
$$

となり，g が負に保たれていることがわかります。

2.2　共変ベクトルと添字の上げ下げ

4 元ベクトル A の大きさ 2 乗が,

$$A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$$

となることから，共変ベクトルと反変ベクトルの関係は，計量テンソルによって

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$
$$A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu$$

と書けます。同時に，これが一般にテンソルの添字の上げ下げの規則にもなるわけです。$(g^{\mu\nu})$ と $(g_{\mu\nu})$ とは，互いに逆行列の関係になりますね。そこで,

$$(g_{\mu\nu})(g^{\nu\rho}) = (g_\mu^\rho)$$

は，単位行列になるわけです。g_μ^ρ はクロネッカーのデルタ δ_μ^ρ と同じです。$g_{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}$，g_ν^μ のいずれもテンソルであり，したがって添字の上げ下げによってお互いに移ることができます。

練習問題

2-1　2 次元ユークリッド空間（平面）上の斜交軸において，ベクトルの共変成分は 2 本の軸への正射影になることを示せ。

2-2　3 次元ユークリッド空間上で次のように決められた斜交軸において，計量テンソルを求めよ。

x^1 軸と x^2 軸が α の角をなす。
x^2 軸と x^3 軸が β の角をなす。
x^3 軸と x^1 軸が γ の角をなす。