20　テンソル密度

簡明な展開で，$\sqrt{\ } d^4x$ が，スカラーの性質をもつ微分体積要素であることが示されています。その結果として，

$$\int \sqrt{\ }\, d^4x, \qquad \int S\sqrt{\ }\, d^4x$$

が，それぞれある時空領域において，座標変換に対する不変量としての 4 次元体積およびスカラー場の積分を表すことになります。スカラー密度以外の一般のテンソル密度の積分は，その変換が領域内の各点において異なり，それらの和としての積分はテンソルになりえません。積分時空領域が無限小である場合に限り，テンソルとしてあつかえることになるわけです。

$\sqrt{\ }$ の微分に関わる公式ですが，$g = -\sqrt{\ }^2$ より $g_{,\nu} = -2\sqrt{\ }\sqrt{\ }_{,\nu}$
したがって，

$$g^{-1}g_{,\nu} = 2\sqrt{\ }^{-1}\sqrt{\ }_{,\nu}$$

となることから,（14.5）は

$$\begin{aligned} g_{,\nu} &= g g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu,\nu} \\ \text{i.e.} \quad -2\sqrt{\ }\sqrt{\ }_{,\nu} &= -\sqrt{\ }^2 g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu,\nu} \\ \therefore \quad \sqrt{\ }_{,\nu} &= \frac{1}{2}\sqrt{\ }\, g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu,\nu} \end{aligned}$$

（14.6）は,

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{-1} g_{,\mu} &= \sqrt{\ }^{-1}\sqrt{\ }_{,\mu} \\ \therefore \quad \Gamma^{\mu}_{\nu\mu}\sqrt{\ } &= \sqrt{\ }_{,\nu} \end{aligned}$$

となります。