21　ガウスの定理，ストークスの定理

21.1　共変的発散とガウスの定理

まず，特殊相対論における粒子流の場の扱いに触れて，基本をおさえておきたいと思います。流れの場の位置変化がなめらかである場合，局所的に各粒子が同じ速度 $\boldsymbol{\beta}$ をもつと考えて問題を単純化すると，実験室系ではかった粒子数密度はローレンツ短縮によって，

$$n = \gamma n_0 \qquad \text{ただし} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

で与えられます。ここに，n_0 は今考えている粒子グループとともに動く座標系ではかった固有数密度で，スカラー場と考えることができます。すると，4 元粒子数束ベクトルを 4 元速度 $v^\mu = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta})$ を用いて，

$$N^\mu \equiv n_0 v^\mu$$

と定義することができ，その発散ゼロ

$$N^\mu{}_{,\mu} = \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{\beta}) = 0$$

はある空間領域 V での積分において，ガウスの定理

$$\int_V \nabla \cdot (n\boldsymbol{\beta}) dV = \int_{\partial V} n\boldsymbol{\beta} \cdot d\boldsymbol{S}$$

の適用によって粒子数の保存を表すことになるわけです。ただし，∂V は領域 V の表面，$d\boldsymbol{S}$ は法線方向の微小面積要素ベクトルとします。例えば，この N^μ に粒子あたりの電荷をかければ 4 元電流密度となり，その発散ゼロは電荷の保存を表すことになります。

さて，以上の議論は発散 $A^\mu{}_{,\mu}$ を共変的発散 $A^\mu{}_{:\mu}$ にとりかえることで，一般相対論に引き継ぐことができそうに思われます。しかし，ガウスの定

理が共変的発散にはそのまま適用できないという問題が残るのです。そこで前節で導入したテンソル密度を用いて，共変的発散を通常の発散に書き戻すという操作をすることになります。スカラー密度の積分は変換の不変量であることが保証されていますから，

$$A^{\mu}{}_{:\mu}\sqrt{} = (A^{\mu}\sqrt{})_{,\mu} = 0$$

が，密度 $A^0\sqrt{}$，流速 $A^m\sqrt{}$ の流体の保存を表すという結果を得ます。

一般のテンソルでは共変的発散を通常の発散に書き戻せないために，発散ゼロを保存則とみなすことができませんが，2 階反対称テンソルに限って

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\sqrt{} = (F^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\nu}$$

と書けることによって，$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$ が保存則になるというわけですね。

21.2　共変的回転とストークスの定理

発散（divergence）に比べて，回転（curl,rotation）はわかりにくいですが，ガウスの定理およびストークスの定理から類推して，流速ベクトル場の場合を考えれば，ある領域について積分したときその境界から流出する強さを表すのが発散で，境界に沿う流れ（渦）の強さを表すのが回転ということになるでしょうか。発散および回転はさらにテンソル場に拡張でき，また積分領域も一般の n 次元に拡張されますから，なかなか図式的なイメージは困難になりますね。

ところで最後の（21.7）式

$$\frac{1}{2}\int\int_{\text{面}}(A_{\mu:\nu} - A_{\nu:\mu})dS^{\mu\nu} = \int_{\text{周囲}} A_{\mu}dx^{\mu}$$

への書き換えの意味は，$dS^{\mu\nu}$ の反対称性をあらわにして，和をとるときに $A_{\mu:\nu}$ と $-A_{\nu:\mu}$ が常にセットとして現れることをわかりやすくしたということです。被積分関数自体が反対称テンソルの形をとっていることが重要ですね。また，Dirac は微分面積要素の向きを $dS^{\mu\nu} = dx^{\nu}\wedge dx^{\mu}$ と選んでいることに注意しましょう。