23　電磁場

23.1　マクスウェル方程式の 4 次元形式

マクスウェル方程式は，もともとローレンツ変換において形を変えない「共変的」なものです。したがって，特殊相対論の範囲では何の変更も必要がありません。しかし，一般相対論では微分演算の共変化が要求されるために，多少の書き換えが生じます。まず，電磁テンソルを用いてマクスウェル方程式を 4 次元テンソル方程式であることが明確な形式に直します。ひとまず特殊相対論の範囲内での書き換えを行い，その後に一般共変化を行っています。

さて，マクスウェル方程式の第 1 の組（23.3）および（23.4）は，電磁場とポテンシャルの関係（23.1）および（23.2）と同値です。このことを 3 次元ベクトル形式と 4 次元テンソル形式でそれぞれ示してみましょう。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi \\
\boldsymbol{H} &= \nabla\times\boldsymbol{A} \\
\therefore\quad \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \nabla\times\nabla\phi \\
&= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{H} &= \nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa &= (\phi, \boldsymbol{A}) \\
F_{\mu\nu} &= \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu} \\
E^m &= F_{m0} \\
H^m &= F_{nr} \quad (m,n,r)\ \text{循環} \\
\therefore\quad & F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0
\end{aligned}$$

テンソル形式がずいぶんすっきりしていて，法則の対称性がはっきり示されていることがわかりますね。

マクスウェル方程式の第 2 の組は，第 1 の組と比較して $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ の役割を入れ替えた対称性をもっています。

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &= (\rho, \boldsymbol{j}/c) \\
F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= 4\pi J^\mu
\end{aligned}$$

23.2　共変形への書き換え

ローレンツ変換のもとで共変的なテンソル方程式に書き直されたマクスウェル方程式を，さらに一般の座標変換において形を変えない，一般共変的なテンソル方程式に修正します。ここは単に，微分を共変微分にとりかえるだけでOKです。第1の組は電磁テンソルの反対称性によって，自動的に共変微分ととりかえてよく，また第2の組は，まさに共変微分への修正を余儀なくされます。あわせて，電荷の保存則についてもテンソル密度を使ったものへと修正を受けます。電荷の保存が，電磁テンソルの反対称性をもとに第2の組から「導出」されているところに注目しましょう。

$F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu}$	$F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu:\nu} - \kappa_{\nu:\mu}$
$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0$	$F_{\mu\nu:\sigma} + F_{\nu\sigma:\mu} + F_{\sigma\mu:\nu} = 0$
${F^{\mu\nu}}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$	${F^{\mu\nu}}_{:\nu} = 4\pi J^\mu$
${J^\mu}_{,\mu} = 0$	$(J^\mu\surd)_{,\mu} = 0$

練習問題

23-1　$F^{\mu\nu}$ に対して $*F^{\mu\nu}$ を，

$$
\begin{aligned}
*F^{m0} &= H^m = F^{nr} \\
*F^{mn} &= E^r = F^{0r} \qquad (m,n,r)\ \text{循環}
\end{aligned}
$$

で定義するとき，マクスウェル方程式の第1の組は第2の組と同形の

$$*{F^{\mu\nu}}_{,\nu} = 0$$

と書けることを確かめよ。　※　$*F^{\mu\nu}$ を $F^{\mu\nu}$ の双対テンソルという。