24　物質の存在によるアインシュタイン方程式の変更

24.1　物質がない場合

物質のないところでの場の方程式が,

$$R^{\mu\nu} = 0$$

で与えられることは，すでに 15 節において仮定として持ち込まれ，それによってシュヴァルツシルトの解も得られたのでした。しかし，なぜに左辺がリッチ・テンソルなのかについてはひとまず十分な納得を保留にしてありました。ここから続く 2 つの節がその目的に割り当てられます。

ひとまず本文の,

$$R^{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0$$

はすぐに納得できますね。もちろん，物質のない空間の場合に右の形を選ぶ必然性は全くなく，冗長以外の何ものでもありません。

一応，上式の左向き矢印の導出過程を示しておきましょう。縮約の必要のためまず添え字のひとつを下げます。

$$g_{\lambda\mu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = R_{\lambda}{}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\lambda}^{\nu}R = 0$$

ここで $\lambda = \nu$ として縮約すれば，$g_{\nu}^{\nu} = 4$ に注意して

$$R - 2R = 0 \quad \text{すなわち} \quad R = 0$$

となり，これを（24.2）に代入して（24.1）を得ます。

24.2　物質がある場合

リッチ・テンソルの存在は，そもそもが質量の存在によってゆがめられた時空の曲がりを示すわけですから，場の方程式の右辺に物質の存在を示すテンソルがくるべきことは予想されることです。このテンソル $Y^{\mu\nu}$ の導入によって，

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = Y^{\mu\nu}$$

と書くとき，左辺の形がはじめて意味をなしてきます。ビアンキの関係式によって

$$Y^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$$

を要請することになり，これがエネルギーおよび運動量の保存則に該当するものになるであろうという推測が成り立つからです。

一般の保存則において微分になるべきところが共変微分になっているために，量 $Y^{\mu\nu}$ の時空における変化は保存則からのずれを生じる結果になります。本文にあるように，これは重力場自身がエネルギーと運動量をになうためということですが，以上の重大な推定への理解が次節の最大のテーマになるでしょう。

本節では，物質が存在する空間における，重力場の方程式がとるべき最終的な形をおおづかみにしています。結論として重力場の方程式が満たすべき条件は，次のように整理されます。

(1)　右辺に物質の存在を示すテンソルを含むテンソル方程式であること。
(2)　$g_{\mu\nu}$ の最高 2 階の微分を含み，それについて線形であること。

詳細は次節にゆずりますが，弱くて静的な場における近似（16 節）で，$R_{\mu\nu} = 0$ をラプラスの方程式になぞらえたように，私たちの次なる目標は，場の源を右辺に含むポアッソン方程式の拡張された形式であるということになるのです。