25　物質のエネルギー・運動量テンソル

25.1　特殊相対論におけるエネルギー・テンソルの拡張

まず，エネルギー・テンソルの本質を理解するために，特殊相対論の範囲内で，連続的な速度分布をもつ粒子系を考え，それを連続的な質量分布へと拡張してみましょう。ちなみにここで扱う粒子系は，21 節で粒子数保存を考えるモデルとして導入したものと同じです。空間に質量 m の粒子が分布しており，位置 x にある粒子の 4 元速度が

$$v(x) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}) \quad ただし，\quad \boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\boldsymbol{v}}{c}, \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

で与えられる連続的な速度分布を持つと仮定します。ここで $\boldsymbol{v}$ は実験室系から見た粒子の 3 次元速度で，これが粒子の位置 x の連続関数であることにより，$\boldsymbol{\beta}$ および γ も x によって決まることになります。したがって，想定した粒子集団は乱雑な熱運動をしている気体分子のようなものでなく，霧や煙の微粒子のようなものをイメージしてもらえばよいかもしれません。

さて，集団のある微小部分をとるとき，粒子の速度はほぼ同じと考えてよいので，これらの粒子グループとともに動く座標系ではかったエネルギー密度は，粒子の固有数密度を n_0 として，

$$\mathcal{E}_0 = n_0 mc^2 = \rho c^2$$

と書けます。ここで，$\rho = n_0 m$ は質量密度を表します。一方，実験室系では粒子あたりのエネルギーが γmc^2，粒子数密度が γn_0 となりますから，

$$\mathcal{E} = \gamma^2 \rho c^2$$

と書き換えられます。同様に対応する運動量密度が，

$$\mathcal{P}^n = mc\gamma\beta^n \cdot \gamma n_0 = \gamma^2 \rho c \beta^n$$

となります。そして，$(\mathcal{E}/c, \mathcal{P})$ が 4 元ベクトルを構成することを思い出しながら，4 元速度 v を用いて書き直せば,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \rho c^2 v^0 v^0 \\ c\mathcal{P} &= \rho c^2 v^n v^0 \end{aligned}$$

となるわけです。

そこで，連続的な物質分布によるエネルギー・運動量が次のように 2 階反変テンソルとして自然に定義できることがわかります。

$$T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu$$

ここで，v^μ は 4 元速度ベクトルの成分であり，また $c = 1$ の単位系にもどったことに注意しましょう。

さて，重力以外に力を受けず，内部に相互作用を持たない物質のエネルギーテンソルの形は，曲がった時空にそのまま引き継がれます。ただし，エネルギー・運動量の密度と流速としては，少なくとも局所的な保存量でなければ意味をなさないので，20 節で学んだようにテンソル密度 $T^{\mu\nu}\surd$ を採用することになります。そして，物質の保存（25.3）

$$(\rho v^\mu)_{:\mu}\surd = (\rho v^\mu \surd)_{,\mu} = 0$$

は当然条件として課すことができるものの，エネルギーテンソルは保存則を構成できません。その理由は 2 つの面から表現できます。ひとつは，後述のように ${T^{\mu\nu}}_{:\nu} = 0$ が確認できるものの，21 節で学んだようにこれを積分してガウスの定理に適合する形に直すことが一般に不可能なためです。もうひとつは，前の節で触れられているように重力場自身がエネルギーと運動量をになうためです。

25.2　運動方程式とエネルギー・テンソル

連続的な物質分布の中の1質点にもどって，力を受けない場合の特殊相対論の枠内での運動方程式を書けば,

$$0 = \frac{dp^\mu}{ds} = mc\frac{dv^\mu}{ds} = mcv^\mu{}_{,\nu}\, v^\nu$$

となりますが，これに数密度 γn_0 をかけることにより,

$$0 = \rho c v^\mu{}_{,\nu}\, v^\nu$$

これを曲がった時空に適合するように書けば，測地線方程式

$$v^\mu{}_{:\nu} v^\nu = 0$$

を得ます。

一方エネルギーテンソルの共変微分は,

$$T^{\mu\nu}{}_{:\nu} = v^\mu(\rho v^\nu)_{:\nu} + \rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu}$$

となりますから，物質保存（25.3）の成立のもとで $T^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$ は測地線方程式と同値であることになります。これは，本来運動方程式の座標積分がエネルギー原理にあたることと，もとをたどれば同じといえますね。

重要なことは，ビアンキの関係式から場の方程式の形として（25.6）

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$$

が推測されることです。もしこうしてよいのなら，場の方程式は自動的に物質保存と測地線に沿う運動の法則を含むというエレガントな結果を得ることになることは，本節の最後に示された通りです。

もちろん，以上で場の方程式の形が上のように一意的に決定できたというわけにはいきません。しかし，少なくともこれまでのところで考え得る最も単純で美しい最有力候補であることは認めざるを得ないのではないでしょうか。そして，後に残された課題は，静的で弱い場の近似によって，場の方程式の $(\mu, \nu) = (0, 0)$ 成分がポアッソン方程式 $\nabla^2 V = 4\pi\rho$ に一致すべきことを用いて，係数 $k = -8\pi$ を決めることだけです。