26　重力場に対する作用原理

重力場における自由質点の作用積分は，9 節で学んだように

$$I = -mc\int ds = -mc\int\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu}}dt$$

で与えられ，$\delta I = 0$ から測地線を得るのでした。ここに，作用原理の構造を見ると，

(1)　被積分関数は x とその 1 階微分を含み，その積分はスカラー
(2)　$\delta I = 0$ が運動方程式を与える
(3)　運動方程式は x の 2 階微分方程式

となっています。そこで重力場を与える作用原理は類推によれば，

(1)　被積分関数は $g_{\mu\nu}$ とその 1 階微分を含み，その積分はスカラー
(2)　$\delta I = 0$ が重力場の方程式を与える
(3)　重力場の方程式は $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分方程式

という構造をもつと考えられます。そこで，(1) の被積分関数の有力候補として $R\sqrt{}$ が導入されるに至るわけですね。

$R\sqrt{}$ の積分はスカラーを与えるものの，$g_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含む点で難点を残しています。そこで，R を $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含む項 R^* と 1 階微分しか含まない項 L に分けて，ガウスの定理により体積積分が変分 0 の表面積分に直される全微分の項を省略することによって，結局

$$I = \int R\sqrt{}d^4x = \int L\sqrt{}d^4x = \int \mathcal{L}d^4x$$

を得ています。力学におけるラグランジアンと比較すれば，$\mathcal{L}$ は 3 次元的なラグランジアン密度といえることがわかります。

以下，アインシュタインの真空方程式の導出まではなかなか骨の折れる計算ですが，特に補足を要する点もないと思います。ただ，この節の中の

計算で $\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ が μ，ν について対称なことを 2 度ばかり使っているので注意しましょう。1 度目は（26.4）の後半 2 項の計算で,

$$\begin{aligned}(R^*\surd\text{の後 2 項}) &= -(g^{\mu\nu}\surd)_{,\nu}\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\sigma} + (g^{\mu\nu}\surd)_{,\sigma}\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} \qquad \leftarrow \text{(22.5)(22.4)}\\ &= g^{\nu\beta}\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\beta\nu}\surd\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\sigma} + (-g^{\nu\beta}\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\beta\sigma} - g^{\mu\alpha}\mathit{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\sigma} + g^{\mu\nu}\mathit{\Gamma}^{\beta}_{\sigma\beta})\surd\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}\\ &= g^{\nu\beta}\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\beta\nu}\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\sigma}\surd + (-2g^{\nu\beta}\mathit{\Gamma}^{\mu}_{\beta\sigma} + g^{\mu\nu}\mathit{\Gamma}^{\beta}_{\sigma\beta})\mathit{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}\surd\end{aligned}$$

となるところで，2 度目は（26.7）の最後の行に移る際に,

$$\begin{aligned}2\delta(\mathit{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha}g^{\mu\nu}\surd)\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta} &= \delta[(g^{\nu\mu}\mathit{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha} + g^{\beta\mu}\mathit{\Gamma}^{\nu}_{\mu\alpha})\surd\,]\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta} \qquad \leftarrow \text{(22.3)}\\ &= -\delta(g^{\nu\beta}{}_{,\alpha}\surd)\mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta}\end{aligned}$$

となるところです。