27　物質が連続的に分布している場合の作用

場の法則を作用原理に帰着させることの意義のひとつは，場と物質との相互作用をそれぞれの作用積分の和として表現できるという簡明さにあります。質量の分布が存在する場合の変分原理を，

$$\delta(I_g + I_m) = 0$$

という形に打ち立てることによって，物質の存在が重力場に与える影響が I_m から生じて場の方程式に変更を与えるとともに，逆に重力場の変化は物質がたどるべき測地線に変更を与えることになります。

さて，物質が位置を変えることによって計量 $g_{\mu\nu}$ が変わるわけですが，その変わり方が新しい作用原理によって与えられるべき場の方程式に従うということになるので，$g_{\mu\nu}$ の変分を直接考えることには困難があります。そこで Dirac は，密度・流束ベクトル p^μ の変分を通じて I_m の変更を試みています。物質素片の時空位置の変分 b^μ に対する p^μ の変分は，

$$\delta p^\mu = (p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)_{,\nu}$$

と与えられていますが，ここで $b^0 = 0$ の場合に変分に対する物質保存から得られる δp^0 の結果からの類推を使っています。「もし，b^μ が p^μ に比例していたら物質素片はそれぞれの世界線にそってずれるだけ」すなわち $b^\mu = kp^\mu$ ならば，

$$\delta p^0 = (p^r b^0 - p^0 b^r)_{,r} = (p^r kp^0 - p^0 kp^r)_{,r} = 0$$

となることから上の結果が類推されるわけですね。

次に質点の作用積分

$$I = -m \int ds = \int L dx^0$$

を物質の連続的な分布に適用して，$p^\mu = \rho v^\mu \surd$ の関係から

$$I_m = -\int \rho \surd d^4x$$

の結果を得ています。しかしこれはわかりやすい形にしただけであり，v^μ が長さ 1 に規格化（$v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1$）されていることから，Dirac による「$g_{\mu\nu}$ には手をふれずに」という回避策を逸脱しているために変分に適さないとして保留されているのです。なお，質点の運動量

$$\frac{\partial L}{\partial (dx^r/dx^0)} = m\frac{dx^r}{ds}$$

の左辺は，解析力学の変分原理における運動量の定義そのものです。

作用積分を p^μ に書き戻してその変分をとるにあたっての（27.9）のあとの計算の 1 行目は,

$$\begin{aligned}
\delta(p^\mu p_\mu)^{1/2} &= \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu)^{-1/2}(\delta p^\nu p_\nu + p^\nu \delta p_\nu) \\
&= \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu)^{-1/2}(\delta p^\nu p_\nu + p^\nu \delta g_{\nu\lambda} p^\lambda + p^\nu g_{\nu\lambda}\delta p^\lambda) \\
&= \frac{1}{2}(p^\lambda p_\lambda)^{-1/2}(p^\mu p^\nu \delta g_{\mu\nu} + 2p_\mu \delta p^\mu)
\end{aligned}$$

によります。途中 $p_\nu = g_{\nu\lambda}p^\lambda$ の関係を使っていることに注意しましょう。

結論として作用積分の変分は,（27.11）の結果を含めて

$$\begin{aligned}
\delta(I_g + I_m) &= -\int \left[\kappa\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu\right]\surd\,\delta g_{\mu\nu} d^4x \\
&\qquad + \int \rho v_{\mu:\nu} v^\nu b^\mu \surd\, d^4x
\end{aligned}$$

となり，$\delta g_{\mu\nu}$ の係数 $=0$ がアインシュタインの場の方程式を与え，一方 b^μ の係数 $=0$ が測地線方程式を与えるという目的の結果を得ました。蛇足ですが，δp^μ の項の書き換え（27.11）の途中で，部分積分の方法によりいわゆる全微分 $(\quad)_{,\nu}$ の形を変分 0 としておとしていることを申し添えます。