

## 28 電磁場の場合の作用

電磁場の作用密度がいきなり与えられていますが、被積分関数がスカラー密度になるべきことや変分0の条件が電磁場の線形微分方程式になることを思えば、 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{\phantom{x}}$ が相当するであろうことは納得がいきますね。あとは作用原理が電磁場の方程式を与えることを確認できればひとまず十分としましょう。係数の $-(16\pi)^{-1}$ は、変分原理によって得られる方程式の単位を合わせることで得られます。

ここで重要なことは、作用積分  $I_{em}$  が  $g_{\mu\nu}$  と電磁ポテンシャル  $\kappa_\sigma$  の微分との汎関数であるという点ですね。したがって、両者による変分を独立にとりその和を全体の変分とすることになるわけです。その結果、

- (1) 電磁場の応力エネルギー・テンソルの項
- (2) 電磁場テンソルの微分の項

の和という形式を得ます。(1)は質量分布に関する作用積分から生じるエネルギーテンソルに対応し、(2)は電磁場に固有の項としてその変分原理が電磁場の方程式を与えることになるわけです。電磁場の作用のみの変分原理  $\delta I_{em} = 0$  を考察してみましょう。特殊相対論の範囲では、 $\delta g_{\mu\nu}$  が考えられないために、(1)の変分は意味をなしません、(2)の変分原理から得られる

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

が真空の Maxwell 方程式を与えることはもうおわかりですね。

### 練習問題

#### 28-1 特殊相対論の範囲で

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$$

となることを確かめよ。