29　電荷をもつ物質の場合

29.1　連続的な電荷分布の作用

電荷 e をもつ粒子と電磁場との相互作用を示す作用積分が，

$$I = -\int \kappa_\mu dx^\mu = -e\int \kappa_\mu v^\mu ds$$

と導入されています。ここでもまた私たちは，電磁場との相互作用を決める唯一のパラメータである電荷を係数とし，そしてまた，電磁場を決定する 4 元ベクトルポテンシャル κ_μ が座標の関数であって，dx^μ との積が時空のスカラーとなることをもって，ひとまずこの類推を認めることとしましょう。結論としてこの作用積分をつけたした上での変分原理が，すでに経験的に知られた電荷と電磁場の相互作用の形式を誘導することをもって，その承認としたいと思います。

あとの展開は，質量分布に対する p^μ に習って，連続的な電荷分布における電流密度に対応する $\mathcal{J}^\mu$ の導入によって同様の「運動学的」な考察がなされています。作用積分（29.4）

$$I_q = -\int \kappa_\mu \mathcal{J}^\mu d^4x$$

における $\mathcal{J}^\mu = \sigma v^\mu \surd$ の定義は，p^μ の質量密度 ρ を電荷密度 σ に置き換えたものにほかなりません。またその変分（29.5）

$$\delta I_q = \int \sigma[-v^\mu \delta\kappa_\mu + F_{\mu\nu}v^\nu b^\mu]\surd\, d^4x$$

にいたる計算では，まず部分積分により全微分 $(\quad)_{,\nu}$ の項を省いていること，また最後に $F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu}$ の書き換えがなされていることはもうおわかりですね。

29.2　電荷分布と場の相互作用

さて，現時点で最も一般的な場合の相互作用の形式が，変分原理

$$\delta(I_g + I_m + I_{em} + I_q) = 0$$

により導出されます。わかりやすい形に一覧にしておきましょう。

作用積分	$\sqrt{\delta g_{\mu\nu}}$ の係数	$\sqrt{\delta\kappa_\mu}$ の係数	$\sqrt{b^\mu}$ の係数
$I_g = -\frac{1}{16\pi}\int R\sqrt{d^4x}$	$-\frac{1}{16\pi}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)$		
$I_m = -\int \rho\sqrt{d^4x}$	$-\frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu$		$\rho v_{\mu:\nu}v^\nu$
$I_{em} = -\frac{1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{d^4x}$	$-\frac{1}{2}E^{\mu\nu}$	$\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}_{:\nu}$	
$I_q = -\int \kappa_\mu J^\mu\sqrt{d^4x}$		$-J^\mu$	$F_{\mu\nu}J^\nu$
変分原理の結果	重力場の方程式	電磁場の方程式	運動方程式

変分原理の結果導出される 3 つの方程式は互いに独立ではなく，運動方程式は重力場の方程式と電磁場の方程式からも導かれることが最後に示されています。連続的な物質分布に対する場の方程式とビアンキの関係式から得られる

$$(\rho v^\mu v^\nu)_{:\nu} = 0$$

が，測地線方程式を与えることが 25 節で示されていますが，同様に（29.10）

$$(\rho v^\mu v^\nu + E^{\mu\nu})_{:\nu} = 0$$

は，電荷をもった物質の運動が電磁場によって測地線からそらされる法則を表しているといえますね。

念のため，$4\pi E^{\mu\nu}{}_{:\nu}$ の計算の 1 行目右辺第 2 項の計算は次のようになります。

$$\begin{aligned}
F^{\mu\alpha}{}_{:\nu}F^{\nu}{}_{\alpha} &= g^{\mu\rho}g^{\alpha\sigma}F_{\rho\sigma:\nu}F^{\nu}{}_{\alpha} \\
&= g^{\mu\rho}F_{\rho\sigma:\nu}F^{\nu\sigma} \\
&= g^{\mu\rho}\cdot\frac{1}{2}(F_{\rho\sigma:\nu}F^{\nu\sigma} + F_{\rho\nu:\sigma}F^{\sigma\nu}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}F^{\nu\sigma}(F_{\rho\sigma:\nu} - F_{\rho\nu:\sigma}).
\end{aligned}$$