Copyright (c) 2005 YOSHIKI TAKAHASHI.

3　曲線座標

3.1　微分と座標変換

微分の略記法として，コンマに下付き添字という最も簡略化された方法をとっていますが，他に $\partial_\mu Q$ などの記法もあります。添字が下につくことが場の量の変化 δQ で説明されていますが，下付き添字が共変成分を必ずしも意味していないことに注意しましょう。ユークリッド空間やミンコフスキー空間のように平坦な空間上の直線座標においては，座標による微分係数は共変ベクトルを構成します。例えば，3 次元空間のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} = A^\mu{}_{,\mu}$$

はスカラーとなりますから，微分演算子 ∇ は共変ベクトルとしてあつかわれます。しかし，後述されるように曲線座標においては，座標による微分係数は一般には共変成分を構成しません。これは，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ そのものが場の量として座標とともに変化することによるものです。

座標系 x^μ から別の座標系 $x^{\mu'}$ への座標変換は,

$$(x^{\mu'}{}_{,\nu}) = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\right)$$

すなわちヤコビの変換行列となります。逆変換は $(x^\lambda{}_{,\mu'})$ ですから,

$$x^\lambda{}_{,\mu'}\, x^{\mu'}{}_{,\nu} = g^\lambda_\nu$$

は当然ですね。

3.2　テンソルの変換

反変ベクトルは変位 δx と同じ変換 $(x^{\mu\prime},_{\nu})$ に従いますが，$A^{\mu}B_{\mu}$ がスカラーであることから，共変ベクトルが逆変換 $(x^{\lambda},_{\mu'})$ に従うことが説明されています。そして一般のテンソルの変換例として，

$$T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'} = x^{\alpha'}{}_{,\lambda}\, x^{\beta'}{}_{,\mu}\, x^{\nu}{}_{,\gamma'}\, T^{\lambda\mu}{}_{\nu}$$

のようになるということですが，説明されているように，ここはもう機械的に添字のバランスをとってやればいいわけです。

ここでテンソルの対称性，反対称性が変換において保たれることが述べられていますが，一応確認しておきましょう。$T^{\nu\mu} = \pm T^{\mu\nu}$ のとき，

$$\begin{aligned} T^{\beta'\alpha'} &= x^{\beta'}{}_{,\nu}\, x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, T^{\nu\mu} \\ &= \pm x^{\alpha'}{}_{,\mu}\, x^{\beta'}{}_{,\nu}\, T^{\mu\nu} \\ &= \pm T^{\alpha'\beta'} \qquad \text{（複号同順）} \end{aligned}$$

また，$g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}, g^{\mu}_{\nu}$ がテンソルであることも確認されていますね。計量テンソルは，基本テンソルとも呼ばれています。そして，一般にテンソルの微分係数はテンソルを構成しないのですが，スカラー場の微分に限って共変ベクトル場を構成するということが確認されています。このへんのことは，共変微分（10 節）で出てきますので，そちらで再度きちんと学ぶことにしましょう。

3.3　球座標の計量

曲線座標の例として，ユークリッド空間上の球座標について考察してみましょう。$x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$ とするときその計量は，

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2 \\ &= (dx^1)^2 + r^2(dx^2)^2 + r^2\sin^2\theta(dx^3)^2 \end{aligned}$$

となって，基本テンソルが

$$\begin{aligned}
\mathsf{G} = (g_{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2 \sin^2(x^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

のように，定数でなく座標の関数になることが直線座標との違いです。

さて，この球座標において反変ベクトルの成分 A^i は $dr, d\theta, d\varphi$ と同じ変換を受けるべきであり，したがって

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2 &= A_r^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2 \\
&= (A^1)^2 + r^2(A^2)^2 + r^2 \sin^2\theta (A^3)^2
\end{aligned}$$

となるべきです。すなわち反変成分は，r, θ, φ 方向への射影である A_r, A_θ, A_φ をそれぞれ $1, r, r\sin\theta$ で割ったものになるわけです。

練習問題

3-1 球座標 $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \varphi)$ において，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の共変成分 A_i と r, θ, φ 方向への射影 A_r, A_θ, A_φ との関係を示せ。

3-2 半径 R の球面上の位置を表す 2 次元座標として，地球の場合と同じく緯度 θ と経度 ϕ をとるとき，この座標の計量を求め，球面上の接ベクトル $\boldsymbol{A}$ の反変成分と共変成分を $\boldsymbol{A}$ の経線・緯線への射影 A_θ，A_ϕ で表せ。