30　一般的な作用原理

30.1　作用原理と場の方程式の形式

ここでは，重力場と相互作用する任意の場がある場合の一般的な作用原理と，そこから得られる場の方程式の形式論が展開され，結論として変分原理から得られる場の方程式が独立でないことを示しています。

まず，重力場の作用積分の変分において

$$\delta I_g = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \right)_{,\nu} \right] \delta g_{\alpha\beta} d^4x$$

の被積分関数は $g_{\alpha\beta}$ と $g_{\alpha\beta,\nu}$ の関数 $\mathcal{L}$ に対するオイラー方程式の左辺にあたります。したがって，その導出過程において

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \delta g_{\alpha\beta,\nu} d^4x = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \delta g_{\alpha\beta} \right] - \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \right)_{,\nu} \delta g_{\alpha\beta} d^4x$$

の右辺第 1 項が，積分領域の境界条件によって落とされていることに注意しましょう。

一方，他の場をテンソル ϕ_n と表して，それに対する作用積分 I' が変分に与える寄与を考察しています。添字 n は，複数の場を区別する番号ですね。たとえば電磁場が重力場とともに存在する場合，

$$\phi_1 = \kappa_\mu \qquad \mathcal{L}' = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \surd$$

$$p^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + N^{\mu\nu}, \qquad N^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} E^{\mu\nu}$$

$$\chi^1 = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}{}_{:\nu}$$

となるでしょう。$p^{\mu\nu} = 0$ は，電磁場のエネルギーの存在によって変更を加えられた重力場の方程式を与え，$\chi^1 = 0$ は真空中の電磁場の方程式を与えることになります。重力場と相互作用するどんな場も，同様にして重力場の方程式に対して相互作用を表す 1 項を付加することになるわけです。

30.2　場の方程式の非独立性

ビアンキの関係式

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{:\nu}=0$$

によって ${N^{\mu\nu}}_{:\nu}=0$ が要請されるために，作用原理から導出される重力場の方程式および他の場の方程式のすべてが互いに独立とはならず，したがって前節で計算されているようにある方程式が他の方程式の連立によって導出されるという結果を生じることになります。このことを本文では，作用積分 I' の領域の表面を変えない座標変換における不変性から自然に ${N^{\mu\nu}}_{:\nu}=0$ が導かれることによって証明を試みています。この作用積分の不変性が，場の方程式の非独立性の一般的な根拠であるというわけです。やや操作的にみえる計算の真意をくみとることは正直のところちょっと難解ですが，計算そのものを追跡することはそう難しくないでしょう。$\delta I'$ の計算で 2 行目から 3 行目に移るところでは，次のように部分積分をしています。

$$\begin{aligned}
\int N^{\mu\nu}(-g_{\mu\alpha}{b^{\alpha}}_{,\nu}-g_{\nu\alpha}{b^{\alpha}}_{,\mu})\sqrt{\ }\,d^4x &= \int(-{N_{\alpha}}^{\nu}{b^{\alpha}}_{,\nu}-{N_{\alpha}}^{\mu}{b^{\alpha}}_{,\mu})\sqrt{\ }\,d^4x\\
&= \int(-2{N_{\alpha}}^{\nu}{b^{\alpha}}_{,\nu})\sqrt{\ }\,d^4x\\
&= \left[-2N_{\alpha}^{\nu}\sqrt{\ }\,b^{\alpha}\right]+2\int(N_{\alpha}^{\nu})_{,\nu}b^{\alpha}d^4x
\end{aligned}$$

結果の第 1 項は，積分領域の境界で $b^{\alpha}=0$ であることから消えることになるのです。

練習問題

30-1　作用原理の一般論において，$\mathcal{L}'$ が場の量 ϕ_n の座標による 1 階以上の微分を含んでいても，変分 $\delta I'$ において $\delta g_{\mu\nu}$ の項以外はすべて $\delta\phi_n$ の項に集約されることを説明せよ。ただし，$\mathcal{L}'$ は $g_{\mu\nu}$ の 1 階以上の微分は含まないものとする。