31　重力場のエネルギー擬テンソル

エネルギーテンソルに対して,

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu} = 0$$

が成立しますが，対称テンソルの性質（21.4）

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu}\surd = (Y_\mu{}^\nu\surd)_{,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta,\mu}Y^{\alpha\beta}\surd$$

を用いれば,

$$(Y_\mu{}^\nu\ \surd)_{,\nu} = \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta,\mu}Y^{\alpha\beta}\surd \quad \neq 0$$

となり，一般にエネルギー保存が成立しません。これは，重力場そのものがエネルギーを担うことによるものと考えることができます。そこで重力場のエネルギー・運動量密度を表す擬テンソルを（31.1）

$$t_\mu{}^\nu\surd\ = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}g_{\alpha\beta,\mu} - g_\mu^\nu\mathcal{L}$$

によって定義しているわけですが，これは解析力学におけるエネルギーの定義

$$H = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q} - L$$

に対応するものです。ラグランジュ関数 $L(q,\dot{q})$ が時間 t を陽に含まないとき,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\ddot{q}$$

となりますが，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

を用いると,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q} - L\right) = 0$$

となることによって保存が保証されている形式です。26 節で学んだように，$\mathcal{L}$ は重力場のラグランジアン密度にあたるものですから，$t_\mu{}^\nu\sqrt{\ }$ の定義は重力場がになうエネルギー・運動量として自然な表現といえます。

保存則（31.2）

$$[(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu)\sqrt{\ }]_{,\nu} = 0$$

にいたる計算は以上の解析力学のものにそのまま対応しています。ただ，$t_\mu{}^\nu$ が擬テンソルであるために，一般の座標変換において不変ではありえず，そのために重力場のエネルギーは局所的な記述が不可能であることが述べられています。