33　重力波

33.1　弱い重力波の近似

からっぽの空間の弱い重力場を調和座標によって記述することによって，重力波の伝播を表すダランベールの方程式（波動方程式）が得られることを示しています。したがって，ここで用いている前提は，

(1)　真空重力場の方程式　$R_{\mu\nu} = 0$　→　(33.1)

(2)　弱い重力場の近似

(3)　調和座標の条件　$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$　→　(33.2)

の 3 つです。(3) の書き換えは，$g_{\rho\lambda}$ をかけて

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}g_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \\ &= g^{\mu\nu}(g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}) = 0 \end{aligned}$$

となります。結論として，

$$g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma,\mu\nu} = \Box\, g_{\rho\sigma} = 0$$

を得るわけですが，ダランベルシアン$\Box$はミンコフスキー空間では，

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle$$

であり，上のダランベール方程式は計量テンソルの各成分が波動方程式を満たすということを意味しています。

練習問題

33-1　真空中の弱い重力場の方程式は，調和座標において

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Box\, g_{\mu\nu} = 0$$

となることを示せ。

33.2　平面重力波

考えている領域の重力波がすべて同一方向に進行するいわゆる平面波の場合，作用密度が $\mathcal{L}=0$ となってエネルギー擬テンソル $t_\mu{}^\nu$ の表式が簡明になり,「透明な」結果が得られることを示しています。

x^3 方向に進む波の場合に，$g_{\mu\nu}$ が x^0-x^3 だけの関数になるというのは，わかりやすくミンコフスキー空間において z 方向に進む正弦波を仮定すれば,

$$\phi=\phi_0\exp i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

に対して，$\boldsymbol{k}=(0,0,k)$ であることから

$$\phi=\phi_0\exp i(\omega t-kz)=\phi_0\exp i\frac{\omega}{c}(ct-z)$$

と書けることにあたります。進行方向を指す定数ベクトルが l_σ である一般の場合には $l_\sigma x^\sigma$ だけの関数になるということは，l^σ をそのまま 4 元波数ベクトル $l^\sigma=(\omega/c,\boldsymbol{k})$ と考えれば，ミンコフスキー空間の場合

$$l_\sigma x^\sigma=\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$$

に対応しますから納得できますね。同様にベクトル l_σ が光的であることは,

$$l^\sigma l_\sigma=\omega^2/c^2-k^2=0$$

にあたり，波が光速で伝播することを意味しています。

この l_σ を用いて, (33.5)

$$g_{\mu\nu,\sigma}=u_{\mu\nu}l_\sigma \quad , \quad u_{\mu\nu}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial(l_\sigma x^\sigma)}$$

とおき，さらに調和座標条件を（33.6）

$$u^\nu_\rho l_\nu=\frac{1}{2}\,u\,l_\rho \quad , \quad u=u^\mu_\mu$$

として適用することにより,

$$\mathcal{L}=L\surd=0$$

を導いています。L の計算は一見ごちゃごちゃするものの，全ての項があっという間に消えてなくなります。

「電磁場についても対応する事情」というのは，$g_{\mu\nu}$ を 4 元ポテンシャル κ_μ に対応させ，その微分の 2 次形式で表される L を $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ に対応させるとき，平面波について作用密度ゼロが導かれる経緯が同じであることを指します。このとき，調和座標条件に相当するものがローレンツ条件なのです。

前準備が整ったところで，いよいよエネルギー擬テンソル ${t_\mu}^\nu$ を計算しています。説明のとおりに進めていけば困難なく結論に達することができるでしょう。最後の行に移るときに用いているのは（33.7）であると思われます。平面波に限れば ${t_\mu}^\nu$ はテンソルと同等になり，重力場のエネルギーを局所的に表現できるという結果を得たわけです。

練習問題

33-2　ローレンツ条件

$$
{\kappa^\mu}_{,\mu} = 0 \qquad （\kappa は 4 元ポテンシャル）
$$

のもとで，平面電磁波に対して

$$
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0
$$

となることを示せ。ただし，添字の上下については $g^{\mu\nu}$ の変動部分を無視して（ミンコフスキー計量と同等の扱いで）おこなってよいものとする。