34　重力波の偏り

34.1　重力波が運ぶエネルギー

x^3 方向に進行する波においてエネルギー擬テンソルを計算して，重力波が確かにその進行方向にエネルギーを運ぶことを示しています。本文のとおりに追跡していけば，下の結果を容易に確認できるでしょう。ただし，途中計算で「最後の行を書くには（34.1）を利用」とあるのは,（34.2）の間違いと思われます。

$$\begin{aligned} 16\pi {t_0}^0 &= \frac{1}{4}(u_{11} - u_{22})^2 + {u_{12}}^2 \\ {t_0}^3 &= {t_0}^0 \end{aligned}$$

${t_0}^0$ は重力波のエネルギー密度，${t_0}^3$ は x^3 方向へのエネルギー流密度を表すことになります。また，これらが u_{11}, u_{22}, u_{12} のみで表現されていることは，重力波が横波であることを示しています。

34.2　重力波の偏り

重力波の偏波が，進行方向を軸とする座標回転において 2 回対称である 2 つの成分をもつことを示しています。ここで微小回転の演算子 R というものを導入していますが，これは訳者の第 8 図の説明にあるように，x^1x^2 面内での微小角 ε の座標軸回転に対する量 a の変換が,

$$a' = (1 + \varepsilon R)a$$

となるものとして定義されています。したがって，ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対しては微小回転変換を

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \mathsf{I} + \varepsilon \mathsf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

と書けば,

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathsf{R} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 \\ -A^1 \end{pmatrix}$$

と行列にまとめることができます。ただし，変換を受ける (x^1, x^2) 成分のみを取り出しました。

一方，$\mathsf{u} = u_{\alpha\beta}$ はテンソルとして変換しますから,

$$\begin{aligned} \mathsf{u}' = \mathcal{R}_\varepsilon \mathsf{u}\, {}^{\mathrm{t}}\mathcal{R}_\varepsilon \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} u_{11} + 2\varepsilon u_{12} & u_{12} - \varepsilon(u_{11} - u_{22}) \\ u_{12} - \varepsilon(u_{11} - u_{22}) & u_{22} - 2\varepsilon u_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるわけですが，これは

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathsf{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22}) \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{12} \\ -2 \times \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22}) \end{pmatrix}$$

とまとめることができます。ベクトル $(\frac{1}{2}(u_{11} - u_{22}), u_{12})$ に対しては回転角 ε の係数が 2 になるところがポイントで，これは今考えている座標軸の回転に対してこのベクトルが 2 回対称になることを表します。

練習問題

34-1 x^1x^2 面内での回転,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

に対する

$$\mathsf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

の変換を計算して，${t_0}^0$ の成分をなす $\frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})$ と u_{12} の回転対称性および相互関係を調べよ。