

4 似非テンソル

4.1 似非テンソル

テンソルのような添字をもち、すなわち添字数 n に対して 4^n 個の成分をもつ量でありながら、座標変換に際してテンソルの変換に従わないものが、似非テンソルです。一般相対性理論の基本において現れる似非テンソルは、微分によって現れる下つき添字が原因となって生じるものです。前述したとおり、テンソルの座標による微分係数は一般にテンソルとならないのです。しかし、添字の上げ下げや縮約の操作自体は座標変換と直接無関係なので、テンソルと同様の手続きで行うことができるわけです。ただし、微分の下付き添字（コンマつき！）については、

$$g^{\alpha\mu} A_{\mu,\nu} = A^{\alpha}_{,\nu}$$

などのうっかりミスに注意しましょう。右辺は $(g^{\alpha\mu} A_{\mu})_{,\nu}$ であって、計量テンソルが座標の関数である一般の場合に、それを微分の外にくくり出すことはできません。一般相対性理論で現れる似非テンソルの代表格として、クリストッフエル記号 $\Gamma_{\mu\nu\sigma}, \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ があげられますが、これは計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の座標微分によってつくられます。

4.2 商の定理

要するに、縮約してテンソルになるものはテンソルであるということになります。また、逆も真で、テンソルの縮約はテンソルであるということになりますね。実はこの定理は、すでに以前に使ってしまっていますが、どこかわかりますか？ ていねいに証明すれば、本文のようになるわけですが、特に説明はいりませんね。