5　曲がった空間

5.1　リーマン空間

ユークリッド空間は，三平方の定理が成り立つ，いわば平らな空間です。例えば 2 次元平面は，2 次元ユークリッド空間です。一方，球面上の直角三角形において，三平方の定理は成り立ちません。球面は曲がった 2 次元リーマン空間です。さらに「曲がった」空間を一般に n 次元空間に拡張して，n 次元のリーマン空間というわけです。

n 次元空間が曲がっていることを直接見るためには，$(n+1)$ 次元ユークリッド空間に埋め込んで見ればいいのです。しかし，曲がっていることを確かめるには例えば三平方の定理が成り立っていないことを示せば十分です。

球面上にはいつくばって住むアメーバは，自分が住む空間が平らであると思い込んで生活しているかもしれませんが，いったん次元の高い 3 次元空間に埋め込んだ自分の「宇宙」を認識できれば，曲がっていることを直接見ることができます。しかし，曲がっていることを確かめるには例えば，ぐるっと円を描いて歩いた自分の軌跡（円周）の長さをその半径で割ってみたとき，その結果が 2π よりわずかに小さいことが示せればいいのです。2 次元アメーバがやがて文明を築いて，自分の「宇宙」を旅行できる高速移動体を発明して，どこまでもまっすぐ突っ走った結末として，スタート地点に逆方向からもどることになり，自分の「宇宙」が曲がって閉じていることを知るかもしれません。

だいぶ脱線しましたが，私たちは曲がったリーマン空間を考察する上で，上記と同じような手順を踏んでいきます。まず高次元ユークリッド空間に埋め込んだリーマン空間を考えることから始めます。しばし，高次元からながめた上で，あらためて本来の自分の「宇宙」であるリーマン空間に降り立って，高次元空間を使わずにその曲がり具合を認識する道具をそろえようというわけです。

5.2　曲がった時空の計量

重力の存在を時空の曲がりに置き換えるという発想が，アインシュタインの重力理論すなわち一般相対性理論の基礎となっています。曲がった時空の曲線座標による計量は，これまでと同様に

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

で与えられ，基本テンソルがまさに重力場の形を与えるものであるとするのです。

$ds^2 > 0$　すなわち　ds が実数のとき，時間的
$ds^2 < 0$　すなわち　ds が虚数のとき，空間的

であるといいます。ミンコフスキー計量と同様に，$(-, +, +, +)$ を符号とする選択では，上記の関係は逆になります。時間的へだたりにある 2 事象は，光速未満の粒子の世界線によってつなぐことができます。すなわち，時間的に因果性をもつことのできる 2 事象であることを示します。一方，空間的へだたりにある 2 事象は，1 つの粒子の世界線でつなぐことはできず，時間的な因果を構成することが不可能であるということになります。逆に，微小な空間的へだたりにおいては，それらの 2 事象を同時とみなすことのできる局所系が存在することになります。