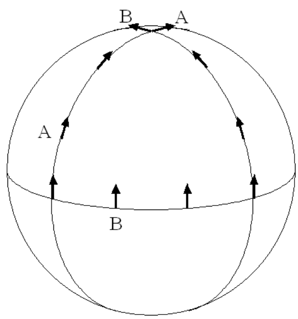
6　平行移動

6.1　曲がった空間における平行移動

例えば球面上に 2 本の平行な「直線」を引こうとしても，平行の意味がどこまで延長しても決して交わらないというものであるならば，2 次元アメーバにとってはそれは曲線とならざるをえません。われわれの地球においても，決して交わらない緯線は，それぞれの曲率で曲がっています。北緯 89 度 59 分をつなぐ緯線は，北極点を中心とした小さな円になりますよね。一方アメーバにとっての直線である大円どうしは，局所的に平行に見えても必ずどこかで交わってしまいます。赤道上で平行な子午線は，北極と南極で交わることになりますね。曲がった空間においては，平行で交わらない「直線」は存在せず，平行の概念そのものが局所的な意味に限定されることがわかると思います。

ここでいうベクトルの平行移動も，当然局所的な平行移動の積み重ねとして定義されます。したがって，その結果は移動の経路に依存することになります。例えば赤道上を出発した 2 次元アメーバ A が，北（前）を向いてまっすぐ 1m 北上して，北極に到着したとします。



一方同じところを出発した別のアメーバ B は，北（左）を向きながら 1m 東に移動して，それから同様に北（前）を向いたまま 1m 北上して北極に到着します。どちらも北を向いたまま，いわば自分自身に平行に移動したわけですが，北極に到着した 2 匹のアメーバは互いに 90 度の角をなして，別の方向（方角は同じ南ですが）を向いて出会うことになるでしょう。さらに B が A のやってきた経路を逆にたどって平行移動すると，出発点に西を向いてもどることになります。

6.2　高次元空間への埋め込み

平行移動の概念は，曲がった時空上でのテンソル場の変化を考えるうえで必要になります。そこでひとまず平行移動によるベクトルの変化を数学的に記述する道具を調達するにあたって，高次元の平坦な空間にとびだして，そこに埋め込まれたリーマン空間を「外から」ながめてみます。このとき平行移動はまさに本来の平行の意味によって実行されることになります。ただし，そのままではリーマン空間から遊離してしまうことになります。ベクトルはもともとリーマン空間にはりついたものとして定義されているのですから，リーマン空間内の平行移動としては，はみ出したベクトルを射影をとって引き戻してやる必要があります。この無限小操作の積み重ねとしてリーマン空間内の平行移動が実現するわけです。

まず，高次元空間の計量が

$$ds^2 = h_{mn} dz^n dz^m$$

で与えられるとしていますが，空間が平坦であれば h_{nm} を位置によって変わらない定数にとることが可能です。リーマン空間として時空を考える場合は，もともと平坦なミンコフスキー時空自体がユークリッド空間ではなく，直交軸の場合でも特殊な計量をもつ擬似的なものですから，それを埋め込む高次元空間の座標軸も直線性さえ確保されていれば十分です。また，一般に埋め込む先の平坦な空間を N 次元としていますが，もちろん最低 $N = 5$ であればいいことはいうまでもないことですね。

4 次元時空上の位置（事象の座標）x^μ に対応する平坦な N 次元空間における座標 $y^n(x)$ は，1 対 1 対応で常に x^μ によって微分可能であるとします。そこで 4 次元曲面（時空）上の微小距離 δs は

$$\begin{aligned}
\delta s^2 &= h_{nm} \delta y^n \delta y^m \\
&= h_{nm} y^n{}_{,\mu}\, y^m{}_{,\nu}\, \delta x^\mu \delta x^\nu \\
&= y^n{}_{,\mu}\, y_{n,\nu}\, \delta x^\mu \delta x^\nu
\end{aligned}$$

となるわけですが，ここでは h_{nm} が定数であることから，

$$h_{nm} y^m{}_{,\nu} = (h_{nm} y^m)_{,\nu} = y_{n,\nu}$$

となることに注意しましょう。

以上の結果,

$$g_{\mu\nu} = y^n{}_{,\mu}\, y_{n,\nu}$$

となり，これが 4 次元リーマン空間である時空を平坦な高次元空間に埋め込んで見下ろした際の，いわゆる曲がりを表現していると考えてよいでしょう。

6.3　平行移動によるベクトルの変化

さて，いよいよ時空上のベクトルの平行移動を考えます。

$$A^n = y^n{}_{,\mu}\, A^\mu$$

は，ベクトル A の時空座標から N 次元空間座標への変換で，時空曲面にはりついたベクトルを高次元にとびだして見たものということです。曲面上の局所座標 x^μ 軸の基底を e_μ と書けば,

$$A = A^\mu e_\mu$$

となりますから，上と比べると $y^n{}_{,\mu}$ は e_μ の N 次元座標による成分を表していることを指摘しておきましょう。その意味から $y^n{}_{,\mu}$ はそのまま接ベクトルまたは基底とも呼ばれます。

さて，このベクトル A を時空曲面上で平行移動するわけですが，前述のように N 次元空間で平行移動すると曲面からのはみだしが生じるので,曲面上に射影して引き戻すという操作をします。そうすることによって,曲がった時空の上に住みその曲がりを局所的には認識できないわれわれにとっては，長さと方向を保ちながら移動したと見えるわけです。ベクトル A は，本来時空上で定義されたものですから，移動によって生じたはみだしすなわち時空曲面に対する法線方向の成分には，直接の物理的な意味がないということですね。

本文では射影して引き戻した成分を K^μ としていますが，最終的にこれが平行移動した結果ですからその意味で普通の表現を使えば，

$$\begin{aligned} A^n y_{n},_{\nu}(x+dx) &= A^\mu(x+dx)y^n,_{\mu}(x+dx)y_{n},_{\nu}(x+dx) \\ &= A^\mu(x+dx)g_{\mu\nu}(x+dx) \\ &= A_\nu(x+dx) \end{aligned}$$

となります。なお，A^n はとりあえず大きさと方向を変えない平行移動をしているわけなので，$A^n(x+dx)=A^n(x)$ ですが，接ベクトルとの内積をとることで法線成分をおとし，時空曲面への射影をとっています。ところで繰り返しになりますが，$y_{n},_{\mu}$ が $y^n,_{\mu}$ に対する共変成分であることは，h_{nm} が定数であることによっています。すなわち

$$h_{nm}y^n,_{\mu} = (h_{nm}y^n),_{\mu} = y_{m},_{\mu} \quad .$$

一方左辺は１次までの展開により，

$$A^n y_{n},_{\nu}(x+dx) = A_\nu + A^\mu y^n,_{\mu}\, y_{n},_{\nu},_{\sigma}\, dx^\sigma$$

となることから，比較により

$$A_\nu(x+dx) = A_\nu(x) + dA_\nu = A_\nu + A^\mu y^n,_{\mu}\, y_{n},_{\nu},_{\sigma}\, dx^\sigma$$

すなわち

$$dA_\nu = A^\mu y^n,_{\mu}\, y_{n},_{\nu},_{\sigma}\, dx^\sigma$$

が平行移動による A_ν の変化になるというわけです。