7　クリストッフェル記号

7.1　曲がった時空の自己完結的記述

（6.3）式

$$g_{\mu\nu} = y^n{}_{,\mu}\, y_{n,\nu}$$

の関係から，平行移動によるベクトルの変化を表す（6.7）式

$$dA_\nu = A^\mu y^n{}_{,\mu}\, y_{n,\nu}{}_{,\sigma}\, dx^\sigma$$

は時空の基本テンソル $g_{\mu\nu}$ のみで書くことができそうですが，実際それが可能です。実はこの書き換えは大変重要な意味を持っています。私たちは時空の曲がりを見るために，ひとまず高次元の平坦な空間にとびだして，平行移動によるベクトルの変化をその高次元空間の座標を通して（6.7）のように表現したのです。しかし，基本テンソルはそれ自体が場の量であり，本来時空曲面上の位置のみの関数として表現できるはずですから，高次元空間は直接には不要です。したがって上の書き換えは高次元空間をひきあいに出すことなく，時空上の場の量の変化を自己完結的に記述することを意味するのです。事実，平坦な高次元空間は曲がった時空をひとまず埋め込んで考察するための抽象的な道具に過ぎません。時空の自己完結的記述は，一般相対性理論を現実と照らし合わせるために必要不可欠なものといえます。私たちはいわば 4 次元時空曲面上にはりついたアメーバであり，それを埋め込んだ 5 次元空間など直接認識することは不可能だからです。

さて,（6.7）式の書き換えは本文の展開で明らかです。なお，くどいようですが添字 n の上げ下げの任意性については，例えば次のとおりです。

$$\begin{aligned} y^n{}_{,\mu\sigma}\, y_{n,\nu} &= y^n{}_{,\mu\sigma}\,(h_{mn} y^m)_{,\nu} \\ &= y^n{}_{,\mu\sigma}\, h_{mn} y^m{}_{,\nu} \\ &= (h_{mn} y^n)_{,\mu\sigma}\, y^m{}_{,\nu} \\ &= y_{m,\mu\sigma}\, y^m{}_{,\nu} = y_{n,\mu\sigma}\, y^n{}_{,\nu} \end{aligned}$$

7.2 クリストッフェル記号と平行移動の公式

以下の公式は，一般相対性理論の数学的記述の基本的な道具である，リーマン幾何学の基本公式となります。クリストッフェル記号は接続係数とも呼ばれ，曲がった空間上での平行移動によるベクトルの変化を，ベクトルの成分そのものと関係づける係数で，一般の n 次元多様体で n^3 個，4 次元時空では $4^3 = 64$ 個の成分をもつ似非テンソルです。

第 1 種クリストッフェル記号

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu},_{\sigma} + g_{\mu\sigma},_{\nu} - g_{\nu\sigma},_{\mu})$$

第 2 種クリストッフェル記号

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma}$$

平行移動によるベクトル成分の変化

$$\begin{aligned} dA_{\nu} &= \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} A_{\mu} dx^{\sigma} \\ dB^{\nu} &= -\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} B^{\mu} dx^{\sigma} \end{aligned}$$

練習問題

7-1 座標変換 $x^{\mu} \to x^{\alpha'}$ における第 1 種クリストッフェル記号の変換を導いて，テンソルの変換性を持たない似非テンソルであることを直接確かめよ。

7-2 半径 R の球面に対して，緯度 $x^1 = \theta$，経度 $x^2 = \phi$ を座標にとる場合，第 1 種および第 2 種のクリストッフェル記号を求めよ。また，球面上のベクトル

$$\boldsymbol{A} = (A^1, A^2) = \left(\frac{1}{R}A_{\theta}, \frac{1}{R\sin\theta}A_{\phi}\right)$$

を緯度 θ の緯線に沿って変位

$$d\boldsymbol{x} = (dx^1, dx^2) = (0, d\phi)$$

だけ平行移動するとき，ベクトルの変化 $d\boldsymbol{A}$ を求めよ。