8　測地線

8.1　測地線＝曲がった時空上の「直線」

3 次元ユークリッド空間で，あるベクトル $\boldsymbol{v}$ をそのベクトルの方向に平行移動すると，当然直線を描くことになります。同様に，リーマン空間においてベクトルをその方向に平行移動したとき，そのベクトルが描く軌跡が測地線と呼ばれるものになるのです。したがって，高次元の平坦な空間への埋め込みを考えれば，曲がったリーマン空間の測地線はもちろん曲線になりますが，へばりついたアメーバの自己完結的な立場では，測地線は空間内でまっすぐに引いた線であるといえますね。最も簡単な 2 次元球面の例では，測地線はいわゆる大円となります。大円は球面世界で 2 点を結ぶ曲線の中で最も長さの短い線でもあります。

以上の理屈を曲がった 4 次元時空に適用することができます。ただし，時空の基本テンソルの成分は符号が特異なので注意を要します。測地線に沿うベクトルの大きさ 2 乗 $u^\mu u_\mu$ の符号によって，時空の測地線は次の 3 つに分類されます。

$$
\begin{array}{lllll}
u^\mu u_\mu & > & 0 & \text{のとき，時間的測地線} & \rightarrow \text{自由粒子の世界線となる} \\
u^\mu u_\mu & = & 0 & \text{のとき，ゼロ・測地線} & \rightarrow \text{光子の世界線となる} \\
u^\mu u_\mu & < & 0 & \text{のとき，空間的測地線} &
\end{array}
$$

ミンコフスキー時空における時間的ベクトルの場合，パラメータ τ を固有時（に光速をかけたもの）にとれば，

$$
\begin{aligned}
u^\mu u_\mu &= \left(c\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \\
&= \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1
\end{aligned}
$$

となります。同様の操作を曲がった時空にも適用すれば，本文で言うように u^μ の「長さ」をつねに 1 とし，パラメタ τ を固有時に一致させること

ができるわけです。

空間的測地線の場合，ベクトルの大きさ 2 乗が負になりますから，測地線に沿う「長さ」あるいは積分を考えるとき，そのままでは虚数になってしまいますから注意が必要です。計量 ds^2 の絶対値をとってあらためて線素の長さ 2 乗と定義するなどの方法がとられます。これは計量の符号形式を $(-,+,+,+)$ と取り替えることと同等ですね。この場合に $\sqrt{|ds^2|}$ は，2 事象点を同時刻とするような局所慣性系における空間距離にあたります。

また，ゼロ・測地線の場合は $ds=0$ となりますから，線素として ds をとる意味がなくなります。したがって，測地線方程式においても固有時とは異なるパラメータを用いることになるわけです。ところで，ゼロ・測地線の場合の $u^\mu u_\mu = 0$ は 3 次元空間のベクトルの場合とは違って $u^\mu = 0$ を意味してはいないことに注意しましょう。

8.2　自由粒子は時間的測地線を描く

重力のほかに力を受けない「自由粒子」の世界線は，時間的な測地線であるとする仮定は，一般相対性理論の土台にある計量仮説，すなわち重力場とその作用が時空の曲がりを表現する基本テンソルのみで記述できるということを，最も簡単な場合に適用して，より具体的に言い換えたものと考えることができます。ミンコフスキー時空において（重力を含めて一切の力を受けない）自由粒子がその世界線として直線を描くことは自明です。一方，時空の曲がりとして重力を記述する一般相対性理論においては，重力そのものは曲がった時空構造の中に包含されて，力としてあらためて考える必要がなくなります。そこで自由粒子は，時空の中での測地線すなわち「まっすぐ」な世界線を描くということになるのです。