9　測地線の停留性

9.1　変分原理による測地線方程式の導出

例えば，曲がった通常の 2 次元曲面における測地線は，曲面上の 2 点を曲面に沿って結ぶ曲線のうち最短（極小）のものとなります。同様のことが 4 次元時空の測地線にも成立するわけですが，ただ気をつけなければいけないことは，時空計量の符号の特異性から「極小」という条件は破棄せざるを得ないということです。実際，時間的測地線の場合にそれは極大をとることになります。そこでさらに一般化して，本文では「停留性」としているわけです。

さて，これまでも何度か困難をおぼえた人がいることと思いますが，4 次元時空間はある意味で擬似的な「空間」であり，事象間の「距離」や曲線の「長さ」といっても私たちが直感的に認識可能な 3 次元ユークリッド空間のものとはかなり異なる擬似的・抽象的な量ですから，それを常に意識しておく必要がありますね。4 次元時空を考察するとき，3 次元空間や 2 次元曲面との類推を用いて理解の助けにすることはもちろん大変有効ですが,「距離」や「長さ」といった概念に対して類推以上の具体性を期待すると，間違いのもとになりますから注意しましょう。

変分原理から測地線の方程式を導出する本文の展開で，ひとつだけ必要かもしれない補足をしておきます。

$$\delta \int_P^Q ds = \int_P^Q \delta(ds) \quad = \quad \int_P^Q \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu},_\lambda \, v^\mu v^\nu \delta x^\lambda + g_{\mu\lambda} v^\mu \frac{d\delta x^\lambda}{ds} \right] ds$$
$$= \quad \int_P^Q \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu},_\lambda \, v^\mu v^\nu - \frac{d}{ds}(g_{\mu\lambda} v^\mu) \right] \delta x^\lambda ds.$$

と，(9.1) 式を導出する過程ですが，１行目右辺の第 2 項は

$$\int_P^Q \left[g_{\mu\lambda} v^\mu \frac{d\delta x^\lambda}{ds} \right] ds = \Big[(g_{\mu\lambda} v^\mu \delta x^\lambda \Big]_P^Q - \int_P^Q \left[\frac{d}{ds}(g_{\mu\lambda} v^\mu) \delta x^\lambda \right] ds$$

と部分積分をした上で，結果の第 1 項が $\delta x^\lambda(P)=\delta x^\lambda(Q)=0$ によって消えるというものです。

最終的に測地線の停留性から変分法を使って測地線の方程式が得られていますが，解析力学で登場する最小作用の原理などで変分原理を知っている人は，この結果は一般的な作用積分

$$S=\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x^\mu,\dot{x}^\mu)d\tau$$

の停留性の条件であるオイラーの方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=0, \quad \dot{x}^\mu\equiv\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

において，$Ld\tau=ds$ として直接得ることもできることに思い当たるでしょう。ここで τ は一般に経路に沿ったパラメタで，最小作用の原理では時間 t をとります。

9.2 自由粒子の作用積分

測地線方程式は自由粒子の運動方程式にあたるものですから，時間的測地線の積分は係数をのぞいて自由粒子の作用積分に一致すると考えることができます。この作用積分はずうっと後の 27 節に登場しますが，測地線方程式と自由粒子の運動方程式の同一性に対する理解を深める上で有意義と思われるので，補足しておきましょう。上記の係数を k として

$$\int Ldt=k\int ds$$

とおいて，簡単のためミンコフスキー時空の場合を考えます。すると対応するラグランジアンは,

$$\begin{aligned} L=k\frac{ds}{dt} &= kc\sqrt{1-\beta^2} \\ &= kc-\frac{1}{2}kc\beta^2+O(\beta^4), \quad \beta\equiv\frac{v}{c} \end{aligned}$$

となります。ラグランジアンにおいて定数は無視できますから，はじめの kc は捨てて $\beta\to 0$ のニュートン近似で $L\to\frac{1}{2}mv^2$ と対応することを考慮すれば，$k=-mc$ を得ます。したがって，自由粒子の作用積分は

$$S_0=-mc\int ds$$

で与えられることになります。この作用積分は一般の時空に拡張することができて，自由粒子のラグランジアンは

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \qquad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$$

と書けます。S_0 の負号のために，前述したように作用積分 S_0 が極小となるとき，時間的測地線の「長さ」$\int ds$ は極大となることも確認できました。

練習問題

9-1　オイラーの方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

において，

$$L = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$$

とおくことにより，測地線の方程式が得られることを確かめよ。

9-2　パラメタ x^1, x^2 によってその上の座標が記述でき，その基本テンソルが $g_{\mu\nu}$ で与えられている 2 次元曲面がある。この曲面上に摩擦なしに拘束されていて，拘束力以外にいかなる外力も受けない粒子の軌道が曲面の測地線となることを，ミンコフスキー時空におけるラグランジアン

$$\begin{aligned} L &= -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\dot{y}^n\dot{y}_n} \\ &= -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \qquad \dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

を用いて示せ。ただし，y^n は 3 次元直交座標で，

$$\dot{y}^n\dot{y}_n = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$$

は速さ 2 乗である。

ヒント：　ラグランジュ方程式（オイラー方程式）が曲面上の測地線の方程式になることをいえばよい。