練習問題解答

1-1

ある慣性系において，粒子の変位を (dt, dx, dy, dz) と観測したとすれば，時空距離は

$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{(cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} \\
&= cdt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}} \\
&= cdt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad (c=1)
\end{aligned}
$$

となり，粒子の固有時間の経過 $d\tau$ に一致する。

　また，4 元速度は

$$
u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\mu}{dt}
$$

だから，時間成分・空間成分はそれぞれ

$$
u^0 = \gamma, \qquad \boldsymbol{u} = \gamma\boldsymbol{\beta}
$$

となる。

1-2

4 元運動量の定義から，

$$
p^\mu = m_0 c u^\mu = m_0 c \frac{dx^\mu}{d\tau}
$$

であり，$d\tau$ がスカラーであるから p^μ は dx^μ と同じ変換に従う 4 元ベクトルである。

また，その成分は上に続いて

$$
(p^\mu) = \left(m_0 c \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \boldsymbol{v}) = (E/c, \boldsymbol{p})
$$

となる。したがってまた，

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \boldsymbol{p}^2$$

となって，これはスカラーであるから $\boldsymbol{p}=0$ となる座標系（粒子とともに動く座標系）における値 ${E_0}^2/c^2$ に一致する。よって，

$$E = \sqrt{{E_0}^2 + \boldsymbol{p}^2 c^2}$$

が導かれた。

1-3

実際に右辺の和をとってみると，

$$\begin{aligned}
(F^{\mu\nu}u_\nu) &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma\beta_x \\ -\gamma\beta_y \\ -\gamma\beta_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{\gamma}{c} \begin{pmatrix} \beta_x E_x + \beta_y E_y + \beta_z E_z \\ E_x + v_y B_z - v_z B_y \\ E_y + v_z B_x - v_x B_z \\ E_z + v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix} \\
&= \frac{\gamma}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{v}/c
\end{aligned}$$

となり，4 元運動方程式の右辺の空間成分が $\gamma\boldsymbol{f}/c$ であることを考慮すれば，

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

とローレンツ力の表式を得る。

2-1

x^1 軸に対して x^2 軸が反時計回りに α の角度をなすとする。計量テンソルは,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

だから，ベクトル A の共変成分 (A_1, A_2) は，反変成分 (A^1, A^2) によって

$$\begin{aligned} A_1 &= A^1 + A^2\cos\alpha \\ A_2 &= A^1\cos\alpha + A^2 \end{aligned}$$

と書けるが，これはまさに x^1 軸および x^2 軸への A の正射影となる。

2-2

x^1, x^2, x^3 軸の基底（単位ベクトル）をそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とすると，変位ベクトル $d\boldsymbol{x}$ はその反変成分によって,

$$d\boldsymbol{x} = dx^1\boldsymbol{e}_1 + dx^2\boldsymbol{e}_2 + dx^3\boldsymbol{e}_3$$

と書ける。したがって計量は,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1\boldsymbol{e}_1 + dx^2\boldsymbol{e}_2 + dx^3\boldsymbol{e}_3)^2 \\ &= (dx^1)^2{\boldsymbol{e}_1}^2 + (dx^2)^2{\boldsymbol{e}_2}^2 + (dx^3)^2{\boldsymbol{e}_3}^2 \\ &\quad +2(dx^1dx^2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 + dx^2dx^3\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 + dx^3dx^1\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1) \\ &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &\quad +2(dx^1dx^2\cos\alpha + dx^2dx^3\cos\beta + dx^3dx^1\cos\gamma) \end{aligned}$$

となるから，計量テンソルは次のとおりである。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{pmatrix}$$

3-1

球座標の基本テンソル

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

によって，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の共変成分は

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$$

となるから，

$$\begin{aligned}(A_1, A_2, A_3) &= (A^1, r^2A^2, r^2\sin^2\theta A^3) \\ &= (A_r, rA_\theta, r\sin\theta A_\varphi).\end{aligned}$$

3-2

座標の計量および基本テンソルは，次のとおりである。

$$ds^2 = R^2d\theta^2 + R^2\cos^2\theta d\phi^2 \qquad (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

したがってベクトル $\boldsymbol{A}$ において，座標 $x^1 = \theta$，$x^2 = \phi$ についての反変成分を (A^1, A^2)，共変成分を (A_1, A_2) とおけば，

$$\boldsymbol{A}^2 = A_\theta^2 + A_\phi^2 = A^1A_1 + A^2A_2 = R^2(A^1)^2 + R^2\cos^2\theta(A^2)^2$$

となるので，求める関係は以下のようになる。

$$A^1 = \frac{1}{R}A_\theta \qquad A_1 = RA_\theta$$

$$A^2 = \frac{1}{R\cos\theta}A_\phi \qquad A_2 = R\cos\theta A_\phi$$

7-1

基本テンソルの変換は,

$$g_{\alpha'\beta'} = x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, g_{\mu\nu}$$

となるから，これをさらに微分すると

$$\begin{aligned} g_{\alpha'\beta'},_{\gamma'} &= x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, g_{\mu\nu},_{\sigma} + (x^{\mu}{}_{,\alpha'\gamma'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'} + x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}\, x^{\mu}{}_{,\alpha'})g_{\mu\nu} \\ g_{\alpha'\gamma'},_{\beta'} &= x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, g_{\mu\sigma},_{\nu} + (x^{\mu}{}_{,\alpha'\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + x^{\sigma}{}_{,\gamma'\beta'}\, x^{\mu}{}_{,\alpha'})g_{\mu\sigma} \\ g_{\beta'\gamma'},_{\alpha'} &= x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, g_{\nu\sigma},_{\mu} + (x^{\nu}{}_{,\beta'\alpha'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + x^{\sigma}{}_{,\gamma'\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'})g_{\nu\sigma} \end{aligned}$$

を得る。(第 1 式＋第 2 式－第 3 式)/2 により，クリストッフェル記号の変換は

$$\Gamma_{\alpha'\beta'\gamma'} = x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'}\, x^{\sigma}{}_{,\gamma'}\, \Gamma_{\mu\nu\sigma} + x^{\mu}{}_{,\alpha'}\, x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}\, g_{\mu\nu}$$

となる。右辺第 2 項の存在により似非テンソルであることが確認された。

7-2

緯度 $x^1 = \theta$，経度 $x^2 = \phi$ に対する球面座標の基本テンソルは,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix} \qquad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

である（練習問題 **3-2** 参照)。成分の座標による微分係数で 0 でないのは,

$$g_{22},_{1} = -R^2 \sin 2\theta$$

のみであり，したがって第 1 種クリストッフェル記号は,

$$\begin{aligned} \Gamma_{221} = \Gamma_{212} &= \frac{1}{2} g_{22},_{1} = -\frac{1}{2} R^2 \sin 2\theta \\ \Gamma_{122} &= -\frac{1}{2} g_{22},_{1} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

その他の成分は 0

また，第 2 種クリストッフェル記号は，

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} &= g^{22}\Gamma_{212} = -\tan\theta \\
\Gamma^1_{22} &= g^{11}\Gamma_{122} = \frac{1}{2}\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

その他の成分は 0

となる。これを用いて，平行移動によるベクトルの変化は

$$
\begin{aligned}
dA_1 &= -\frac{1}{2}A^2R^2\sin 2\theta \cdot d\phi \\
dA_2 &= \frac{1}{2}R^2\sin 2\theta (A^1 d\phi - A^2 d\theta)
\end{aligned}
$$

となる。座標軸への射影 (A_θ, A_ϕ) を用いて，変位 $(0, d\phi)$ に対する結果を得ると

$$
\begin{aligned}
dA_\theta &= -A_\phi \sin\theta \cdot d\phi \\
dA_\phi &= A_\theta \sin\theta \cdot d\phi
\end{aligned}
$$

となる。

9-1

L の偏微分をとると，

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{L}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{g_{\lambda\nu,\mu}\,\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu}{2L}
$$

$$
\begin{aligned}
\because \quad \frac{\partial(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)}{\partial\dot{x}^\sigma} &= g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\dot{x}^\mu}{\partial\dot{x}^\sigma}\dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu\frac{\partial\dot{x}^\nu}{\partial\dot{x}^\sigma}\right) \\
&= g_{\mu\nu}(g^\mu_\sigma\dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu g^\nu_\sigma) \\
&= g_{\sigma\nu}\dot{x}^\nu + g_{\mu\sigma}\dot{x}^\mu = 2g_{\sigma\nu}\dot{x}^\nu.
\end{aligned}
$$

したがって，オイラー方程式の左辺は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{L}\right)-\frac{g_{\lambda\nu},_\mu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu}{2L} \\
&= g_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\nu}{L}\right)+\frac{\dot{x}^\nu}{L}g_{\mu\nu},_\lambda \dot{x}^\lambda-\frac{g_{\lambda\nu},_\mu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu}{2L} \\
&= g_{\mu\nu}L\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)+\frac{1}{2L}(g_{\mu\nu},_\lambda+g_{\mu\lambda},_\nu-g_{\lambda\nu},_\mu)L^2\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} \\
&= L\left(g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\Gamma_{\mu\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}\right)=0
\end{aligned}$$

となる。ただし，途中で $Ld\tau = ds$ を用いた。
両辺に $g^{\alpha\mu}/L$ をかけると，

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}=0$$

と測地線の方程式を得る。

9-2

ラグランジアン L の偏微分をとると，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}=\frac{2mg_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}},\qquad \frac{\partial L}{\partial x^\mu}=\frac{mg_{\lambda\nu},_\mu \dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}.$$

ラグランジュ方程式をつくって，

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$$

によりパラメタを座標時 t から固有時 τ にとりかえると，**9-1** とほぼ同じ計算によって測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0$$

を得る。したがって，粒子は曲面上の測地線を軌道として運動する。

この問題は，曲がった 4 次元時空とそれを埋め込んだ平坦な 5 次元空間の関係を類推するのに格好の材料である。イメージとして，曲面への拘束は重力場すなわち曲がった時空への拘束に相当し，測地線軌道は自由粒子の世界線に相当することになる。

ちなみに，非相対論的な範囲では拘束される空間（曲面，曲線）の線素を ds として，

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mg_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \qquad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$$

となり，運動方程式

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0$$

を得る。

10-1

与えられた変換に $g^{\delta'\alpha'}$ をかけて添字をひとつ上げると，

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\delta'}_{\beta'\gamma'} &= x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^{\alpha'}{}_{,\eta}\, g^{\zeta\eta}(x^\mu{}_{,\alpha'}\, x^\nu{}_{,\beta'}\, x^\sigma{}_{,\gamma'}\, g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + x^\mu{}_{,\alpha'}\, x^\nu{}_{,\beta'\gamma'}\, g_{\mu\nu}) \\
&= x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^\nu{}_{,\beta'}\, x^\sigma{}_{,\gamma'}\, g^\mu_\eta g^{\zeta\eta} g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^\nu{}_{,\beta'\gamma'}\, g^\mu_\eta g^{\zeta\eta} g_{\mu\nu} \\
&= x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^\nu{}_{,\beta'}\, x^\sigma{}_{,\gamma'}\, g^\zeta_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + x^{\delta'}{}_{,\zeta}\, x^\nu{}_{,\beta'\gamma'}\, g^\zeta_\nu \\
&= x^{\delta'}{}_{,\lambda}\, x^\nu{}_{,\beta'}\, x^\sigma{}_{,\gamma'}\, \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + x^{\delta'}{}_{,\nu}\, x^\nu{}_{,\beta'\gamma'}
\end{aligned}$$

となり，これが求める変換である。

10-2

$$
\begin{aligned}
&A^{\alpha'}{}_{:\gamma'} = A^{\alpha'}{}_{,\gamma'} + \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} A^{\beta'} \\
= \quad & (x^{\alpha'}{}_{,\mu} A^{\mu})_{,\sigma} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + (x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\nu}{}_{,\beta'} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + x^{\alpha'}{}_{,\nu} x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}) x^{\beta'}{}_{,\rho} A^{\rho} \\
= \quad & (x^{\alpha'}{}_{,\mu\sigma} A^{\mu} + x^{\alpha'}{}_{,\mu} A^{\mu}{}_{,\sigma}) x^{\sigma}{}_{,\gamma'} \\
& \qquad + (x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} g^{\nu}_{\rho} \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + x^{\alpha'}{}_{,\nu} x^{\beta'}{}_{,\rho} x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}) A^{\rho} \\
= \quad & (x^{\alpha'}{}_{,\mu\sigma} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + x^{\alpha'}{}_{,\nu} x^{\beta'}{}_{,\mu} x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'}) A^{\mu} \\
& \qquad + x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} A^{\mu}{}_{,\sigma} + x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} A^{\rho} \\
= \quad & x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} (A^{\mu}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} A^{\rho}) = x^{\alpha'}{}_{,\mu} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} A^{\mu}_{:\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\because \quad x^{\alpha'}{}_{,\mu\sigma} x^{\sigma}{}_{,\gamma'} + x^{\alpha'}{}_{,\nu} x^{\beta'}{}_{,\mu} x^{\nu}{}_{,\beta'\gamma'} = (x^{\alpha'}{}_{,\sigma} x^{\sigma}{}_{,\gamma'})_{,\mu} = g^{\alpha'}_{\gamma'}{}_{,\mu} = 0
$$

11-1

$R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の成分は合計 $2^4 = 16$ 個である。
場合分けして考えると，

(i)　添字がすべて同じ場合　　$R_{1111} = R_{2222} = 0.$

(ii)　添字が 3 つだけ同じ場合　　$2 \times 4 = 8$ 個すべて 0。

(iii)　2 つ同じ添字が 2 組ある場合

　全部で 6 個あって，

$$R_{1122} = R_{2211} = 0$$

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$$

以上，独立な成分は 1 個である。

　3 次元空間の場合も同様の考察で，独立な成分の個数は 6 個となる。

11-2

7-2 の結果

$$g_{11} = R^2 \qquad g_{22} = R^2\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{221} = \Gamma_{212} &= -\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta & \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} &= -\tan\theta \\ \Gamma_{122} &= \frac{1}{2}R^2\sin 2\theta & \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

を用いて，添字を下げた曲率テンソル

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta}(\Gamma^\beta_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\beta_{\nu\rho,\sigma}) + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\alpha\rho} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\alpha\sigma}$$

を計算する。**11-1** の結果から独立な成分のひとつは

$$\begin{aligned} R_{1212} &= g_{11}\Gamma^1_{22,1} - \Gamma^2_{21}\Gamma_{122} \\ &= R^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) - (-\tan\theta)\cdot\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta \\ &= R^2\cos^2\theta \end{aligned}$$

となる。

12-1

$$\Gamma^1_{22,1} = -1, \quad \Gamma^2_{12,1} = \Gamma^2_{21,1} = -1/r^2$$
$$\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} = -1$$

から，曲率テンソルの 0 でないと考えられる成分は，R_{1221} および対称性によりこれと関連付けられたものに限られる（**11-1** 参照)。ところが，

$$\begin{aligned} R^1_{221} &= -\Gamma^1_{22,1} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} \\ &= -(-1) + \frac{1}{r}\cdot(-r) = 0 \end{aligned}$$

であるから，

$$R_{1221} = R_{2112} = -R_{2121} = -R_{1212} = 0$$

すなわち曲率テンソルの成分はすべて 0 であることが確認された。

12-2

2 軸のなす角を α とすると，

$$S_{(1)} = x^1 = r\cos\phi - \frac{r\sin\phi}{\tan\alpha}, \qquad S_{(2)} = x^2 = \frac{r\sin\phi}{\sin\alpha}$$

となるのでこれを微分すると，

$$\frac{\partial S_{(1)}}{\partial r} = \cos\phi - \frac{\sin\phi}{\tan\alpha}, \qquad \frac{\partial S_{(1)}}{\partial\phi} = -r\sin\phi - \frac{r\cos\phi}{\tan\alpha}$$

$$\frac{\partial S_{(2)}}{\partial r} = \frac{\sin\phi}{\sin\alpha}, \qquad \frac{\partial S_{(2)}}{\partial\phi} = \frac{r\cos\phi}{\sin\alpha}$$

さらに微分して，

$$\frac{\partial^2 S_{(1)}}{\partial r^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 S_{(1)}}{\partial r\partial\phi} = -\sin\phi - \frac{\cos\phi}{\tan\alpha} = \frac{1}{r}\frac{\partial S_{(1)}}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial^2 S_{(1)}}{\partial\phi^2} = -r\left(\cos\phi - \frac{\sin\phi}{\tan\alpha}\right) = -r\frac{\partial S_{(1)}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 S_{(2)}}{\partial r^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 S_{(2)}}{\partial r\partial\phi} = \frac{\cos\phi}{\sin\alpha} = \frac{1}{r}\frac{\partial S_{(2)}}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial^2 S_{(2)}}{\partial\phi^2} = -\frac{r\sin\phi}{\sin\alpha} = -r\frac{\partial S_{(2)}}{\partial r}$$

したがって，$S_{(1)}, S_{(2)}$ が偏微分方程式 $S_{,\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}S_{,\sigma}$ の解であることが確認された。

12-3

必要な量のうち 0 でないものを計算して列挙すれば,

$$
\begin{aligned}
&ds^2 = dr^2 + \rho^2 \sin^2 \frac{r}{\rho} \cdot d\phi^2 \\
&g_{11} = 1, \quad g_{22} = \rho^2 \sin^2 \frac{r}{\rho}, \qquad g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 r/\rho} \\
&g_{22,1} = \rho \sin \frac{2r}{\rho} \\
&\Gamma_{122} = -\frac{1}{2}\rho \sin \frac{2r}{\rho}, \qquad \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \frac{1}{2}\rho \sin \frac{2r}{\rho} \\
&\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\rho \sin \frac{2r}{\rho}, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\rho \tan r/\rho} \\
&\Gamma^1_{22,1} = -\cos \frac{2r}{\rho}, \qquad \Gamma^2_{12,1} = \Gamma^2_{21,1} = -\frac{1}{\rho^2 \sin^2 r/\rho} \\
&\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} = -\cos^2 \frac{r}{\rho}
\end{aligned}
$$

となる。したがって曲率テンソルの 0 でない成分は,

$$
R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -\sin^2 \frac{r}{\rho} \quad .
$$

13-1

与えられた変換式を x^ρ で微分すると,

$$
\begin{aligned}
x^{\lambda'}{}_{,\rho} \quad &= \quad g^\lambda_\rho + \frac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\mathrm{P})\big\{g^\mu_\rho(x - x_{\mathrm{P}})^\nu + (x - x_{\mathrm{P}})^\mu g^\nu_\rho\big\} \\
&= \quad g^\lambda_\rho + \frac{1}{2}\big\{\Gamma^\lambda_{\rho\nu}(\mathrm{P})(x - x_{\mathrm{P}})^\nu + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}(\mathrm{P})(x - x_{\mathrm{P}})^\mu\big\}
\end{aligned}
$$

さらに x^σ で微分すると,

$$
x^{\lambda'}{}_{,\rho\sigma} = \frac{1}{2}\big\{\Gamma^\lambda_{\rho\nu}(\mathrm{P})g^\nu_\sigma + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}(\mathrm{P})g^\mu_\sigma\big\}
$$

となる。また，変換式を $x^{\alpha'}$ で微分すると，

$$g^{\lambda}_{\alpha} = x^{\lambda}{}_{,\alpha'} + \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathrm{P})\bigl\{x^{\mu}{}_{,\alpha'}(x-x_{\mathrm{P}})^{\nu} + (x-x_{\mathrm{P}})^{\mu}x^{\nu}{}_{,\alpha'}\bigr\}$$

$$\therefore \quad x^{\gamma}{}_{,\lambda'}\Big|_{\mathrm{P}} = g^{\gamma}_{\lambda}$$

となるから，結局

$$\begin{aligned} x^{\gamma}{}_{,\lambda'}\, x^{\lambda'}{}_{,\rho\sigma}\Big|_{\mathrm{P}} &= g^{\gamma}_{\lambda}\cdot\frac{1}{2}\bigl\{\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}(\mathrm{P})g^{\nu}_{\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}(\mathrm{P})g^{\mu}_{\sigma}\bigr\} \\ &= \frac{1}{2}\bigl\{\Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma}(\mathrm{P}) + \Gamma^{\gamma}_{\sigma\rho}(\mathrm{P})\bigr\} \\ &= \Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma}(\mathrm{P}) \end{aligned}$$

すなわち，

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(\mathrm{P}) = 0$$

つまり，座標系 (x') は点 P における測地座標系となる。

14-1

$$\| g_{\lambda\mu} \| \cdot \| g^{\mu\nu} \| = \| g_{\lambda\mu}g^{\mu\nu} \| = \| g^{\nu}_{\lambda} \| = 1$$

より，

$$g \equiv \| g_{\lambda\mu} \| = \frac{1}{\| g^{\lambda\mu} \|}$$

したがって，以下アインシュタインの規約を解除して

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\lambda\mu}} = \frac{\partial}{\partial g^{\lambda\mu}}\left(\frac{1}{\| g^{\lambda\mu} \|}\right) = -\frac{1}{\| g^{\lambda\mu} \|^2}\frac{\partial \| g^{\lambda\mu} \|}{\partial g^{\lambda\mu}}$$

ここで，$\| g^{\lambda\mu} \|$ を余因子 $\mathcal{G}^{\lambda\mu} = \| g^{\lambda\mu} \| g_{\lambda\mu}$ を用いて

$$\| g^{\lambda\mu} \| = \sum_{\mu}(g^{\lambda\mu} \times \mathcal{G}^{\lambda\mu})$$

と展開すれば，

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\lambda\mu}} = -\frac{\mathcal{G}^{\lambda\mu}}{\| g^{\lambda\mu} \|^2} = -\frac{g_{\lambda\mu}}{\| g^{\lambda\mu} \|} = -g g_{\lambda\mu}$$

を得る。

14-2

12-3 の結果

$$R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -\sin^2 \frac{r}{\rho}$$

を用いて，リッチテンソル $R_{\nu\rho} = R^{\mu}_{\nu\rho\mu}$ を計算すれば,

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{22} R_{2112} = -\frac{1}{\rho^2} \\ R_{12} &= R_{21} = 0 \\ R_{22} &= g^{11} R_{1221} = -\sin^2 \frac{r}{\rho} \end{aligned}$$

となる。また，$R = g^{\nu\rho} R_{\nu\rho}$ によりスカラー曲率は,

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = -\frac{2}{\rho^2}$$

となる。なお，これは空間的距離の符号を $ds^2 > 0$ とした結果であり，$ds^2 < 0$ すなわち $g < 0$ とした場合には $R = 2/\rho^2 > 0$ となる。

16-1

$g_{\mu\nu}$ を行列表示すると,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{mn} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

となるから,

$$g \equiv \| g_{\mu\nu} \| = g_{00} \| g_{mn} \| .$$

一方，$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列だから，

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} \times \mathcal{G}_{\mu\nu} \qquad (\mathcal{G}_{\mu\nu}\text{は}\, g_{\mu\nu}\text{の余因子})$$

と書ける。したがって各成分は,

$$g^{00} = \frac{1}{g} \times \| g_{mn} \| = \frac{1}{g_{00}}$$

$$g^{m0} = \frac{1}{g} \times \mathcal{G}_{m0} = 0 \qquad \because \quad \mathcal{G}_{m0} = (-1)^m \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} g^{mn} &= \frac{1}{g} \times \mathcal{G}_{mn} \\ &= \frac{1}{g} \times g_{00} \times \tilde{\mathcal{G}}_{mn} \quad (\tilde{\mathcal{G}}_{mn}\text{は}\,(g_{mn})\text{ に対する }g_{mn}\text{の余因子}) \\ &= \frac{\tilde{\mathcal{G}}_{mn}}{\| g_{mn} \|} \quad \text{すなわち } g^{mn}\text{は}\, g_{mn}\text{の逆行列} \end{aligned}$$

となる。

18-1

$g_{11} = -f(r)$ とおいてクリストッフェル記号を計算すると，以下のようになる。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - f(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2)$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{11} = -f(r), \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{m}{r^2(1-2m/r)},$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{m}{r^2 f}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{f'}{2f}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{f}, \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{f},$$

$$\mathit{\Gamma}^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad \mathit{\Gamma}^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$\mathit{\Gamma}^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \mathit{\Gamma}^3_{23} = \cot\theta$$

これらを用いて，重力場の方程式は

$$R_{00} = \frac{m}{2r^2 f}\left\{\frac{f'}{f} + \frac{2m}{r^2(1-2m/r)}\right\} = 0$$
$$\text{i.e.} \quad \frac{f'}{f} = -\frac{2m}{r^2(1-2m/r)}$$

となり，これを積分して $\lim_{r\to\infty} f(r) = 1$ により，

$$f(r) = \frac{1}{1-2m/r}$$

を得る。他の成分についても同じである。

18-2

$$L = \left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\phi}^2)\right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

だから，t については

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$

θ については,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -r^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\phi}^2$$
$$\therefore \quad \frac{d}{ds}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\phi}^2 = 0$$
$$\text{i.e.} \quad \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\cdot\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\phi}^2 = 0$$

また，ϕ については

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{d}{ds}(r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}) = 0$$

を得る。

18-3

ds^2 の式に代入して得られた結果を $\dot{r}^2$ について解くと，

$$\dot{r}^2 = k^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right)$$

ここで，$u = 1/r, \quad \dot{r} = -\dot{u}/u^2$ と変数変換すると，

$$\frac{\dot{u}^2}{u^4} = k^2 - (1 - 2mu)(1 + h^2u^2)$$

$\dot{\phi}^2 = u^4h^2$ だから，上式の両辺に $u^4/\dot{\phi}^2 = 1/h^2$ をかければ

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{h^2}(k^2 - 1 + 2mu - h^2u^2 + 2mh^2u^3)$$

これを ϕ で微分して整理すると，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

を得る。

18-4

与えられた u を軌道方程式にあらためて代入すれば，

左辺 $\simeq \dfrac{1}{l}[1 + \varepsilon_0 - 2\delta e \cos(1+\delta)\phi - 3\varepsilon_2 \cos 2(1+\delta)\phi]$

右辺 $\simeq \dfrac{1}{l}\left[1 + \dfrac{3m}{2l}(2 + e^2) + \dfrac{6me}{l}\cos(1+\delta)\phi + \dfrac{3me^2}{2l}\cos 2(1+\delta)\phi\right]$

となるから両辺を比較して，

$$\varepsilon_0 \simeq \frac{3m}{2l}(2+e^2), \quad \delta \simeq -\frac{3m}{l}, \quad \varepsilon_2 \simeq -\frac{me^2}{2l}$$

を得る。$\varepsilon_0, \delta, \varepsilon_2, m/l$ が同程度の微小量となることから，これらについて 2 次の項を捨てたことがあらためて正当化される。

19-1

dt/dr の式をひっくり返すだけで，ただちに

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{k}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

であるが，無限遠（$r=\infty$）から初速 0（$v^1=0$）で落下する物体について，

$$k = \sqrt{1-\frac{2m}{r}+(v^1)^2} = 1$$

が保存されるから，

$$\beta(r) = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{\frac{2m}{r}}$$

となる。これを r で微分すると，

$$\frac{d\beta(r)}{dr} = \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{m}{2r}}(r-6m)$$

となり，$r=6m$ で $|\beta(r)|$ は最大値をとる。

19-2

$$\beta^2 = \frac{(v^1)^2}{(v^0)^2} = \frac{k^2 - g_{00}}{(k/g_{00})^2} = {g_{00}}^2 \left(1 - \frac{g_{00}}{k^2}\right)$$

だから,

$$\begin{aligned} k = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - \beta^2/{g_{00}}^2}} &\simeq \sqrt{g}_{00}\left(1 + \frac{\beta^2}{2{g_{00}}^2}\right) \\ &\simeq \left(1 - \frac{m}{r}\right)\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \\ &\simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{m}{r} \end{aligned}$$

を得る。したがって，ニュートン力学の標準的な表記にもどせば次のエネルギーの式を得る。

$$k m_0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{G M m_0}{r} \quad .$$

23-1

与えられたテンソル方程式

$$*F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

から第 1 の組の 3 次元ベクトル形式を導けばよい。まず,

$$\begin{aligned} *F^{0\nu}{}_{,\nu} &= *F^{0m}{}_{,m} \\ &= -H^m{}_{,m} = 0 \\ \text{すなわち} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} *F^{m\nu}{}_{,\nu} &= *F^{m0}{}_{,0} + *F^{mn}{}_{,n} \\ &= H^m{}_{,0} + E^r{}_{,n} - E^n{}_{,r} \qquad (m,n,r)\ \text{循環} \\ &= \left[\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E}\right]^m = 0 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E}.$$

当然ながら，共変形は微分を共変微分ととりかえればよく，

$$*F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$$

となる。

28-1

電磁場のテンソルは,

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

だから,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -2({E_x}^2 + {E_y}^2 + {E_z}^2) + 2({H_x}^2 + {H_y}^2 + {H_z}^2) \\ &= -2(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2) \end{aligned}$$

となる。

30-1

$\mathcal{L}'$ が ϕ_n ，$\phi_{n,\sigma}$ ，$\cdots$ を含むとき，作用積分の変分は

$$\delta I' = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi_n} \delta \phi_n + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi_{n,\sigma}} \delta \phi_{n,\sigma} + \cdots \right) \surd\, d^4x$$

という形になる。ただし，添字については場を区別する n を含めて和をとるものとする。ここで例えば 1 階微分の項を取り出して，

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi_{n,\sigma}} \delta \phi_{n,\sigma} = A^{n\sigma} \delta \phi_{n,\sigma}$$

とおけば，その積分は

$$\int A^{n\sigma} \delta \phi_{n,\sigma} \surd\, d^4x = \left[A^{n\sigma} \surd\, \delta \phi_n \right] - \int (A^{n\sigma} \surd)_{,\sigma} \delta \phi_n d^4x$$

と部分積分でき，右辺第 1 項は積分領域の境界で $\delta \phi_n = 0$ となるために消える。同様に高階微分の項も部分積分で順次階数を下げることができるから，結局 $\delta g_{\mu\nu}$ の項以外はすべて $\delta \phi_n$ の項に集約される。

33-1

（33.3）,（33.4）を用いて，

$$\begin{aligned}
R_{\rho\sigma} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\rho\sigma\nu} \\
&\simeq \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} (g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\rho\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\sigma,\rho\nu} + g_{\rho\sigma,\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} (g_{\mu\nu,\rho\sigma} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu,\rho\sigma} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu,\rho\sigma} + g_{\rho\sigma,\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma,\mu\nu} = \frac{1}{2} \Box\, g_{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

33-2

4 元ポテンシャル κ_μ を $l_\sigma x^\sigma$ だけの関数と見ることができる（ただし，$l_\sigma l^\sigma = 0$）。すると，

$$\kappa_{\mu,\sigma} = u_\mu l_\sigma \quad , \quad u_\mu = \frac{\partial \kappa_\mu}{\partial(l_\sigma x^\sigma)}$$

と書くことができて，ローレンツ条件は

$$\kappa^\mu{}_{,\mu} = u^\mu l_\mu = 0$$

となるから，

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} \\
&= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(u_\mu l_\nu - u_\nu l_\mu)(u_\alpha l_\beta - u_\beta l_\alpha) \\
&= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(u_\mu u_\alpha l_\nu l_\beta - u_\mu u_\beta l_\nu l_\alpha - u_\nu u_\alpha l_\mu l_\beta + u_\nu u_\beta l_\mu l_\alpha) \\
&= 2u_\mu u^\mu l_\nu l^\nu - 2u_\mu l^\mu u^\nu l_\nu = 0
\end{aligned}$$

34-1

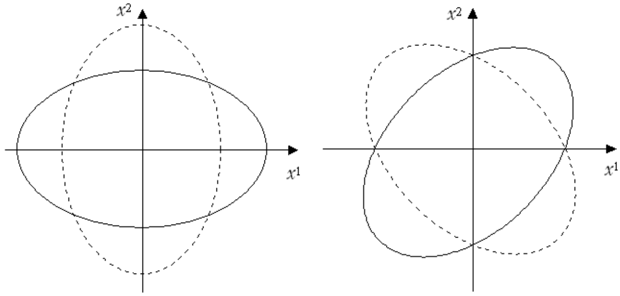
$$\begin{aligned}
\mathsf{u}' &= \mathcal{R}\mathsf{u}\,{}^{\mathrm{t}}\mathcal{R} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{11}\cos^2\theta + u_{12}\sin 2\theta + u_{22}\sin^2\theta & -\frac{1}{2}(u_{11}-u_{22})\sin 2\theta + u_{12}\cos 2\theta \\ -\frac{1}{2}(u_{11}-u_{22})\sin 2\theta + u_{12}\cos 2\theta & u_{11}\sin^2\theta - u_{12}\sin 2\theta + u_{22}\cos^2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるから，エネルギーに寄与する成分は次のように変換する。

$$\frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})' = \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})\cos 2\theta + u_{12}\sin 2\theta$$

$$u_{12}{}' = u_{12}\cos 2\theta - \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})\sin 2\theta$$

$\theta = \pi$ は両者を変えないから，2 つの成分はいずれも回転において 2 回対称である。また，$\theta = \pm\pi/4$ は両者を交換するから，2 つの成分は互いに 45 °ずれた方向への偏波を示す。



参考文献

[1] 平川浩正：『相対論』（共立出版，1971）

[2] 藤井保憲：『時空と重力』（産業図書，1979）

[3] ランダウ，リフシッツ：『場の古典論』第 6 版
（恒藤敏彦，広重徹訳，東京図書，1978）

[4] 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）

[5] 冨田憲二：『相対性理論』（丸善，1990）

[6] 菅野禮司：『微分形式による特殊相対論』（丸善，1996）

[7] 戸田盛和：『相対性理論 30 講』（朝倉書店，1997）

[8] テイラー，ホイーラー：『一般相対論入門ーブラックホール探査』
（牧野伸義訳，ピアソン・エデュケーション，2004）