

Mathcad による振動系の解析

高橋 善樹

福島県立喜多方工業高等学校, 966-0914 喜多方市豊川町米室字高吉 4344-5

BXT02731@nifty.ne.jp, <http://homepage2.nifty.com/ysc/>

Mathcad は, Mathematica と並ぶ数学・技術計算ソフトウェアである。特長としては, 数学の標準表記を使っているため可読性が高く, 数式を含むワークシートがそのまま一般を対象としたドキュメントとして通用することである。したがって, 数学的記述やグラフ・図表を含むレポート作成にワードプロセッサとして使用することもできる。汎用性の高い Mathcad を支援ソフトとして, いくつかの簡単な振動系の解析を試みたのでここに紹介する。

1 数学・技術計算ソフト Mathcad について

1.1 Mathcad の概要

Mathcad は, アメリカで開発された数学・技術計算ソフトウェアで, 日本においては現在「Mathcad 2000J」がその日本語版として提供されている。機能的には, 数学ソフトとしてよりポピュラーな Mathematica に匹敵する汎用ソフトである。

Mathematica との最も大きな違いは, ワークシートにおける数式が標準表記であるということである。そのため可読性が高く, Mathcad を知らない対象者にも数式を含めてプレゼンテーションが可能である。Mathcad ワークシートはフォントの品質がやや落ちるものの, そのままレポートとして十分使えるものである。入力も簡単で, 微分・積分記号などがワンキーまたはメニューボックスのクリックで入力できる。したがって, 全てが特有の関数として表記される Mathematica に比べて, 初心者にはとつきやすい操作性を持っているといえる。

計算機能上の全面的な比較は, 本稿の目的をはずれるので他にゆずるとして, 今回の使用目的に関わる範囲でひとつあげれば, Mathematica は全般的にシンボリック計算に強い。とりわけ, Mathcad に微分方程式をシンボリックすなわち解析的に解く機能がないのは残念である。しかし, 数値積分の機能はひけをとらず, 結果のグラフ表現とあわせて十分な計算能力をもつといえるだろう。

以下に Mathematica および Mathcad による数式の表記の違いをみるために例をあげておく。

(Mathematica)

```
f[x_, n_] := Sum[x^i, {i, 0, n}]  
D[P[x, y], x]  
Integrate[1/Sqrt[x], {x, a, b}]
```

(Mathcad)

$$f(x, n) := \sum_{i=0}^n x^i$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x, y)$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

2 Lagrange の運動方程式

2.1 運動方程式のたてかた

振動系を記述する運動方程式をたてるにあたって, もちろんあらわに (力 まかせに) $F = ma$ を書き下ろすことも可能だが, 系が複雑になると力の記述はかなりの困難をとまなう。そこで, 重力やフックの法則に当てはまる範囲での復元力による運動の場合, より簡明に記述できるポテンシャルを, 逆に座標で微分して力を導出する方法が簡便である。そこで, 出てくるのがラグランジュの方程式である。

ラグランジュ方程式は, 運動の法則のより抽象度の高

い表現である「最小作用の原理」から導かれるとするのが解析力学の立場であるが、とにかく多自由度系の運動解析に威力を発揮するラグランジュ方程式について、マニュアル的におさらいしておこう。

系の一般座標を q 、一般速度を $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$ とする。系の運動エネルギー K 、ポテンシャル・エネルギー U に対して

$$L = K - U$$

をラグランジアンといい、一般に $q, \dot{q}$ の関数となる。ラグランジアン L に対して、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

となる。得られた微分方程式は、例えば

$$m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F} = 0$$

(質点 m の変位 $\mathbf{r}$ に対して)

$$I\ddot{\theta} - N = 0$$

(慣性モーメント I の角変位 θ に対して)

と同じになる。

2.2 単振り子

簡単な例として単振り子の運動方程式をたててみる。質点 m が長さ l の糸につり下げられた振り子の角変位 θ に対して、

$$K = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad U = mgl(1 - \cos \theta)$$

であるから、ラグランジアンとその微分は

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

となり、運動方程式

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

を得る。

3 単純振動系

単振り子の発展として、振幅が十分小さい場合には単振動として扱える系のうち、興味深い問題を含むもの

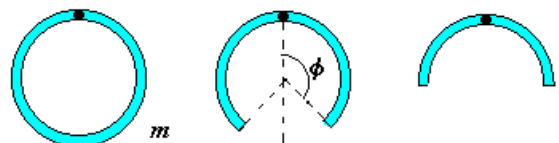
について解析してみよう。なお、以後すべての系の解析は、主に

1. 運動方程式の導出
2. 運動方程式の数値積分
3. 積分結果のグラフ化

の点で Mathcad の支援を受けながら、独立したワークシートとして作成したものの概略である。本稿の目的に添うために、Mathcad ドキュメントの中で主要な計算およびグラフについては、これらから抜粋したものを必要に応じて掲載することにする。

3.1 リング振り子

リングの 1 点を支点とした振り子は、リングの下部をカットしても周期が変わらない。この事実のよりエレガントな説明は次節に見送るが、まずは運動方程式をたてて確認してみよう。



支点から中心角 ϕ だけ残して切り欠いたリングについて考える。もとのリングの質量を M とすれば、切り欠いたリングの質量は、

$$m = \frac{\phi}{\pi} M$$

であり、またその重心は支点から、

$$l_G = \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi}\right)a \quad (a \text{ はリングの半径})$$

だけ下になる。角変位を θ とするとき位置エネルギーと運動エネルギーは、

$$U = -mgl_G \cos \theta$$

$$K = \frac{1}{2}ml_G^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\{ma^2 - m(a - l_G)^2\}\dot{\theta}^2$$

(平行軸の定理 $I = I_G + mR^2$ より)

となるから、ラグランジュ方程式を求めれば次のようになる。

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{2a} \sin \theta$$

すなわち，長さ $2a$ の単振り子と等価であり，微小振動におけるその周期は，

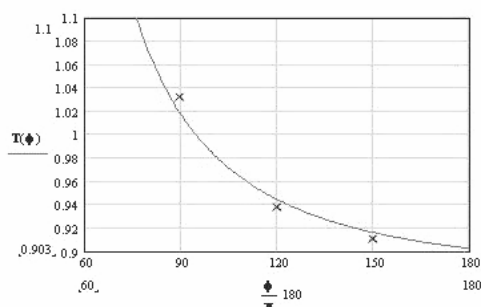
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

となり， ϕ に依存しない。

リング振り子の実験



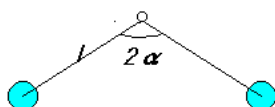
幅のあるリング振り子の周期の ϕ 依存性
(Mathcad によるグラフと実験値 = ×)



5mmφ のアルミ棒を鍋に合わせて半径 10cm に曲げて， $\phi = \pi \sim \pi/3$ のリング振り子を 4 通り作って実験した。はじめ，方程式のミスで周期が ϕ に依存する計算結果を得たが，実験はそれをみごとに否定し，ナイフの上で振らしたところすべて同じ周期約 0.91 [sec.] を示した。ちなみに幅の無視できないリング振り子では，切り欠きが大きいほど (ϕ が小さいほど) 周期が長くなることを，理論上確認することができたが，工作用紙でいくつか幅のあるリング振り子をつくり実験したところ，測定精度の範囲で理論値とほぼ満足できる一致をみた。

3.2 やじろべえ振り子

うでの長さ l ，開き角 2α のやじろべえ形の振り子を考える。



平衡位置からの角変位を θ とすると，ラグランジアンは次のようになる。

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \frac{1}{2}(2m)l^2\dot{\theta}^2 + mgl(\cos(\alpha + \theta) + \cos(\alpha - \theta)) \\ &= ml^2\dot{\theta}^2 + 2mgl \cos \alpha \cos \theta \\ &\simeq ml^2\dot{\theta}^2 + 2mgl \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \end{aligned}$$

ただし，ポテンシャルの基準点は支点にとり，微小振動の近似をとった。

微分を実行して次の運動方程式を得る。

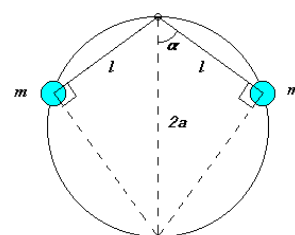
$$\ddot{\theta} + \frac{g \cos \alpha}{l} \theta = 0$$

したがって，周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$$

となり，右図の円の直径

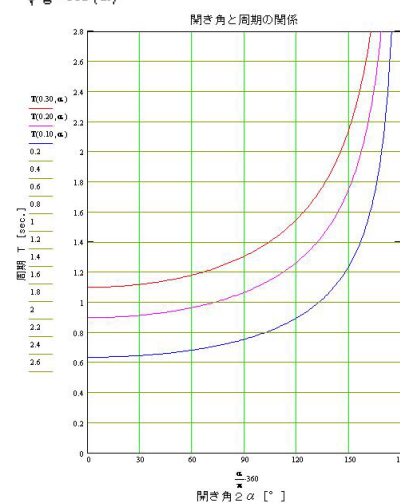
$$2a = \frac{l}{\cos \alpha}$$



を長さとする単振り子に同等であることがわかる。同一円周上におもりが位置するようなやじろべえ振り子はすべて同じ周期をもつということになり，実は前述したリング振り子はこれらのやじろべえ振り子の集合と考えれば，切り欠きの大きさに関わらずすべて同じ周期を持つという事実に対して，方程式をたてるまでもなく納得できることに気づく。簡単で美しい現象には，簡明でエレガントな解釈が必ずあるものである。

Mathcad による関数とグラフ

$$T(l, \alpha) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \cdot \cos(\alpha)}}$$

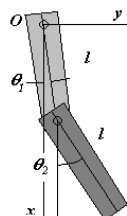


4 連成振動系

自由度2の振動系のうちから，カオス的なふるまいをすると思われる連成棒振り子について解析する。

4.1 連成棒振り子

簡単のため長さ l ，質量 m の同じ2本の棒の連結を考えることにする。2本の棒の重心の座標および，速度成分は以下の通りである。



$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}l \cos \theta_1, & y_1 &= \frac{1}{2}l \sin \theta_1 \\x_2 &= 2x_1 + \frac{1}{2}l \cos \theta_2, & y_2 &= 2y_1 + \frac{1}{2}l \sin \theta_2 \\ \dot{x}_1 &= -\frac{1}{2}l\dot{\theta}_1 \sin \theta_1, & \dot{y}_1 &= \frac{1}{2}l\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= 2\dot{x}_1 - \frac{1}{2}l\dot{\theta}_2 \sin \theta_2, & \dot{y}_2 &= 2\dot{y}_1 + \frac{1}{2}l\dot{\theta}_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

慣性モーメント $I = \frac{1}{12}ml^2$ を用いて，ラグランジアンは

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$U = -mg(x_1 + x_2)$$

$$L = K - U$$

によって得られる。Mathcad によって微分を実行して次の運動方程式を得た。

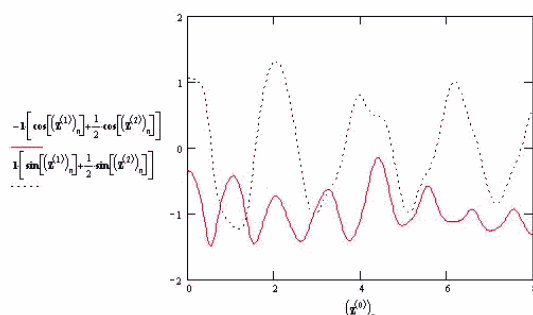
$$\ddot{\theta}_1 = \frac{3}{8}(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 3\frac{g}{l} \sin \theta_1)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{3}{2}(-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - \frac{g}{l} \sin \theta_2)$$

Mathcad によるシンボリックな微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial}{\partial \theta_1} L \\ \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}_1} &= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} L \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \theta_1' \cdot \cos(\theta_1) \cdot \theta_2' \cdot \sin(\theta_2) - \frac{1}{2} \cdot \theta_1' \cdot \sin(\theta_1) \cdot \theta_2' \cdot \cos(\theta_2) - \frac{3}{(2 \cdot l)} \cdot g \cdot \sin(\theta_1)\end{aligned}$$

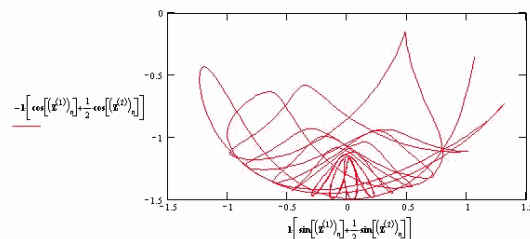
下の棒の重心の水平位置（破線）と垂直位置（実線）の時間変化



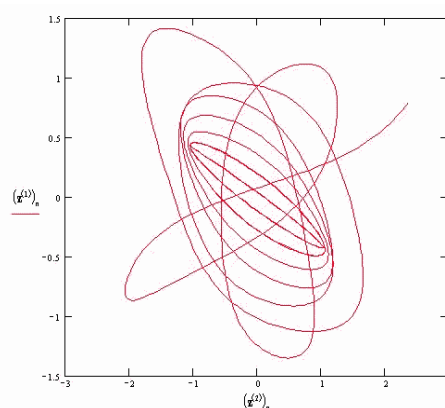
4.2 カオス的なふるまいについて

前節の結果を利用して，カオスの香り漂う連成棒振り子の運動を Mathcad のグラフを通して見てみよう。

下の棒の重心の軌跡



2つの棒の角変位を直角座標にプロット



4.3 連成棒振り子の実験

15mm 角のアルミパイプを使い，長さ 30cm のものをベアリングで連結した。減衰は早いですが，初期条件の違いにより実に様々な運動を見せてくれる。



運動を記録しよう

思い，手近にあった豆球を 2.5V-4.7F のコンデンサとともに振り子に搭載した。1回の充電で1分程度はもつので，十分記録できる。シャッター開放で写真にとるのが記録としてはいいのだが，時間とフィルムの無駄を省くためデジタルカメラの動画を使った。コマ送りで見ると，速いところではかなり軌跡が流れるが，その部分での速度がわかって結果的にはおもしろい記録になった。減衰が大きいので，シミュレーションで対応する軌跡を見つけることはできなかったが，カオスの一端

を垣間見ることができた。

5 共振系

共振現象はエネルギー交換のプロセスが見えにくいものが多く、共振系全体としての運動方程式を書き下すのは一般に困難である。ここでは、比較的そのメカニズムがはっきりしていてわかりやすい2つの例について解析してみよう。

5.1 ウィルバースフォース振り子

つまきばねの性質から、上下振動とねじれ振動が交替する共振系である。おもりの質量を m 、慣性モーメントを I とし、また伸縮の弾性定数（ばね定数）を k 、ねじれの弾性定数を μ とする。伸縮とねじれそれぞれの平衡位置からの変位を x, θ とすれば、両者を独立とした場合の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx, \quad I\ddot{\theta} = -\mu\theta$$

となるから、共振条件は次式で表される。

$$\frac{k}{m} = \frac{\mu}{I}$$

エネルギー移動のメカニズムは、ばねの自然な伸縮がそのねじれを伴うことにある。そこで、両者の相互作用を記述するためにばねの伸び x に対して自然に生じるねじれを $\Delta\theta$ として、両者が、

$$\Delta\theta = \alpha x$$

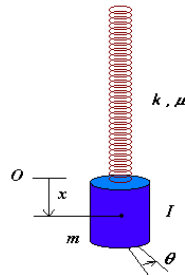
なる比例関係にあると仮定する。すると、もしばねの伸びが x のとき、ねじれの平衡点は αx だけずれ、実際のねじれが θ であるならば、次のトルクを生じることになる。

$$\tau = -\mu(\theta - \alpha x)$$

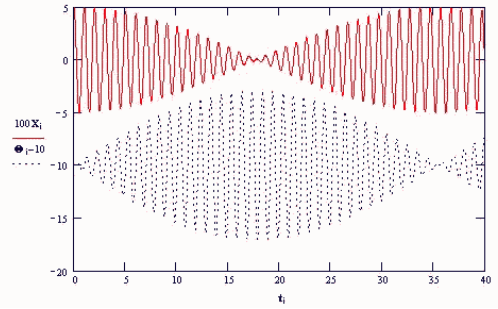
以上の近似モデルから結論として次の運動方程式を得た。

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\alpha\mu}{k}\right) \\ \ddot{\theta} &= -\frac{\mu}{I}(\theta - \alpha x) \end{aligned}$$

実際の振り子では、フックの法則からの逸脱がみられ、パラメータの測定もかなり困難であるが、その精度と近似の範囲でまず満足できる実験結果を得た。



測定パラメータ値による数値シミュレーション
(実験による共振周期は約 40 秒であった)



5.2 ふりこ三兄弟

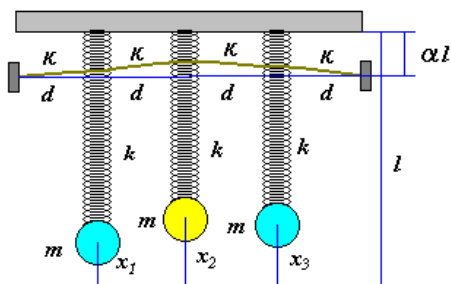
ある研究会で写真のような共振ばね振り子の報告を聞き、その場でキットをいただきました。作者の「ふりこ三兄弟」というネーミングは、この共振系の運動にぴったりで、兄弟が仲良くリズムを合わせたりケンカを始めたりする様子に、つい頬がゆるむ。



おもりの質量 m 、ばねの平衡長 l 、ばね定数 k は同じとし、いずれも平衡時に支点から αl のところにゴムが固定されているとする。また4本にわかれたゴムの平衡時の長さとはばね定数はすべて同じで d, κ とする。おもりの平衡位置からの変位を x_1, x_2, x_3 とし、ゴムによる結合は十分弱いとすれば、平衡時からのゴムの伸びは例えば

$$\sqrt{d^2 + \alpha^2(x_2 - x_1)^2} - d \simeq \frac{\alpha^2(x_2 - x_1)^2}{2d}$$

などとなる。ただし、 $d \gg \alpha x_1, \alpha x_2$ として近似をとった。ゴムは平衡状態ですでに伸びていることも考慮して、その自然長からの伸びを βd とする。

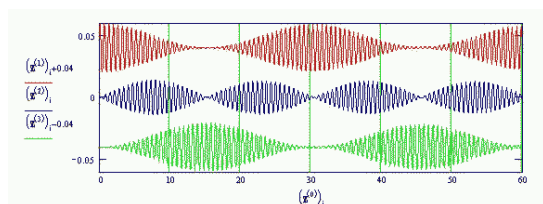


以上の設定で Mathcad で運動方程式を求めると次のようになった。

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\kappa\alpha^2}{2m}\left[2\beta + \frac{\alpha^2}{d^2}(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)\right](2x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - \frac{\kappa\alpha^2}{2m} \\ &\quad \times \left[2\beta + \frac{\alpha^2}{d^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1)\right](2x_2 - x_1 - x_3) \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{k}{m}x_3 - \frac{\kappa\alpha^2}{2m}\left[2\beta + \frac{\alpha^2}{d^2}(x_3^2 + x_2^2 - x_3x_2)\right](2x_3 - x_2)\end{aligned}$$

「ふりこ三兄弟」の共振パターンの例
(数値積分のためのソースの一部とグラフ)

$$D(t, X) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\kappa\alpha^2}{2m}\left[2\beta + \frac{\alpha^2}{d^2}\left[(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)\right]\right](2x_1 - x_2) \\ -\frac{k}{m}x_2 - \frac{\kappa\alpha^2}{2m}\left[2\beta + \frac{\alpha^2}{d^2}\left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1)\right]\right](2x_2 - x_1 - x_3) \\ -\frac{k}{m}x_3 - \frac{\kappa\alpha^2}{2m}\left[2\beta + \frac{\alpha^2}{d^2}\left[(x_3^2 + x_2^2 - x_3x_2)\right]\right](2x_3 - x_2) \end{bmatrix}$$



ゴムの伸縮はフックの法則からかなりの逸脱が見られ、また使用時のパラメータ値を特定するのも困難である。したがって以上のモデルはかなりあいまいな近似にならざるを得ないが、「ふりこ三兄弟」の共振プロセスをよく再現し、パラメータのあいまいな測定精度の範囲では、繰り返し周期もほぼ一致した。

6 おわりに

以上 Mathcad による振動系の解析のいくつかを例にあげたが、そのソースについては紙数の都合で多くの例を示すことはできなかった。詳しくはホームページで公開しているので、そちらを参照いただきたい。連成棒振り子については自己流の解析がすんだ後に、物理教育学会誌の論文をみつけた。また、その他の系の解析もモデルとして妥当なものであるかどうか、過去の論文等に当たっていないので多少不安なところもある。気づいた点はご指摘いただければ幸いである。

CPU の速度が日進月歩で向上している現在、数値計算の速度に加えてグラフィックスの表示速度も速くなってきている。したがって、Mathcad における数式のフォントもさらに品質の高いものにできるのではないかと期待を抱いている。そうすれば、Mathcad ドキュメントがそのまま各種レポートや論文等に使用されることも多くなるだろう。

Mathcad については、インターネット上にコラボレートリが開設され、各国のユーザーが様々な Mathcad ドキュメントを公開している。未だに Mathematica ほどポピュラーにはなっていないが、使い勝手のよさから国内でももっと普及して、プロとアマチュアを問わず、数学ソフトで物理学を楽しみ、互いに交流できる環境が広がっていくことを願っている。

参考文献

- [1] ランダウ、リフシッツ：「ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程 力学」（東京図書）
- [2] 鈴木三男，増田健二：二重振り子におけるカオス的振舞．物理教育，48-1(2000)1
- [3] 愛知・岐阜・三重物理サークル：「いきいき物理わくわく実験 2」（新生出版）
- [4] 横浜物理サークル：YPC ニュース，No.114
- [5] 松岡浩三：3 連共振ばね振り子の教材化，福島県高等学校教育研究会理科部会平成 12 年度研究大会