特殊相対性理論 *compact*

2006 年 12 月 1 日　初版

著　者　　高橋善樹

非売品

特殊相対性理論

compact

高 橋 善 樹 著

の試みである。また，$dct \times dct = dct^2$ と書くことにする。演算 d は指数に優先すると考えたい。

0.2　ベクトル・テンソル演算

本書では，変換や 2 階テンソルにおいて $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ などのいわゆるダイアド表記を積極的に使用する。2 階をこえるテンソルをあつかう一般相対論においては，何といってもアインシュタインの和の規約を用いた成分表示がエレガントだが，時間成分と空間成分を相対的に独立にあつかうことの多い特殊相対論の範囲では，ベクトル・テンソルの (1+3) 表示がわかりやすく便利である。そこで 3 次元ベクトルの直積を含む 1 次変換やテンソルにおいては，ダイアドを用いて表記の簡素化をはかった。

なお，たとえば電磁テンソルの (1+3) 表現において空間成分をなす磁場の反対称テンソルは，

$$*\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

と表記する。$*$ は，いわゆる双対をなすテンソルへの変換を意味するが，この場合 3 次元の軸性ベクトルから対応する反対称テンソルをつくる演算子と考えてよい。これによってベクトル積は次のようになる。

$$*\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{v} *\boldsymbol{B} = (v_x, v_y, v_z) \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}$$

ちなみに，ベクトル積は直積により次のように書けることにも留意したい。

$$*(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}$$

問 0-1　$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}$ を計算し，これがベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の反対称テンソル表現になることを確かめよ。

問 0-2　上の関係を用いて，次を証明せよ。

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

まえがき

本書は，特殊相対性理論の基礎を整理したものであるが，とりわけ一般相対性理論に向けて学習をすすめるときに必要になるベクトル・テンソル解析を平易なレベルで積極的に活用した。ただし上下添字つきの成分表示はあえて避け，時間成分と空間成分の（1+3）表記およびダイアド表記を用いて，すべてのベクトル・テンソル計算を行列積として表現することにより，可読性と簡明さを併せ持つよう工夫した。

もちろん，2 階をこえるテンソルをあつかう一般相対性理論では，アインシュタインの和の規約を活用した添字つき成分表示が何といっても便利である。しかし，特殊相対性理論の範囲では，その基礎的内容は 2 階テンソルまでで十分表現可能であり，時間成分と空間成分を相対的に独立にあつかうことが多いので,（1+3）表記は可読性において成分表示にまさるとも劣らないと考えてその徹底した活用を考慮した。

一方，上下添字つき成分表示は反変・共変の区別がすっきりしており，縮約の手続きも上下で和をとってキャンセルするという簡明さは捨てがたいものである。したがって，本書では必要に応じて反変・共変の別を上下のドットとして表記することも試みてみた。そうすることで行列表示の制約をいくらかこえることができたのではないかと思う。

本書を使用するにあたっては，特殊相対性理論の入門的内容，電磁気学の基礎，ベクトル解析および行列の知識を必要とする。おおむね大学中級レベルと考えていいだろう。特殊相対性理論の入門的内容については，拙著「らくがきぶつり　相対論入門セミナー」を併せて活用いただければ幸いである。

2006 年 12 月 1 日

高 橋 善 樹

目　次

0　数学的な準備

0.1　物理量および演算の表記

数学上の表記について，いくつかの留意点を列記しておく。

(1) 記号の使い分け

スカラー	ds, γ	イタリック体
3 次元空間ベクトル	$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{0}$（ゼロベクトル）	イタリック体太字
4 次元時空ベクトル	x, u, $\mathsf{0}$（ゼロベクトル）	サンセリフ体小文字
変換行列・テンソル	A, G, L, I（恒等変換）	サンセリフ体大文字
ベクトルの内積	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$	
ベクトルの直積	$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b} = (a^i b^j)$	
転置行列	${}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}$, ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}) = \mathsf{A}$	ベクトルの場合は省略
逆行列	L^{-1}, $(\mathsf{L}^{-1})^{-1} = \mathsf{L}$, $\mathsf{L}\mathsf{L}^{-1} = \mathsf{I}$	
4 元量の (1+3) 表示	$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$, $\mathsf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha} & \mathsf{A} \end{pmatrix}$	

(2) 行列の演算

ベクトル・テンソルおよび変換行列等の演算は，ベクトル積以外行列の演算ルールにしたがう。以下にいくつか例を挙げておく。

$$(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$$

$${}^{\mathrm{t}}(\mathsf{L}\mathsf{x}) = {}^{\mathrm{t}}\mathsf{x}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{L} = \mathsf{x}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{L}$$

$$\boldsymbol{\beta}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}\mathsf{A}\boldsymbol{\beta} = {}^{\mathrm{t}}(\mathsf{A}\boldsymbol{\beta})(\mathsf{A}\boldsymbol{\beta}) = (\mathsf{A}\boldsymbol{\beta})\cdot(\mathsf{A}\boldsymbol{\beta}) = (\mathsf{A}\boldsymbol{\beta})^2$$

※　行ベクトルと列ベクトルの違いは，通常転置記号を省略し演算の前後関係で判断する。

(3) その他

$c\,dt$ は，ct を 1 つの変数と見て dct と表記する。これは一般的な記法ではないが，空間座標と時間を同等にあつかうという意味を強調したひとつ

同様にして，これらのベクトルの直積と同形式の量として，次のような 2 階テンソルを考えることができる。

$$
\begin{array}{llll}
(\boldsymbol{a}^{\cdot}\circ\boldsymbol{b}^{\cdot})' = \mathsf{R}\boldsymbol{a}^{\cdot}\circ\boldsymbol{b}^{\cdot}\,{}^{t}\mathsf{R} & \to & \mathsf{T}'^{\cdot\cdot} = \mathsf{R}\mathsf{T}^{\cdot\cdot}\,{}^{t}\mathsf{R} & \text{（反変テンソル）} \\
(\boldsymbol{a}.\circ\boldsymbol{b}.)' = {}^{t}\mathsf{R}^{-1}\boldsymbol{a}.\circ\boldsymbol{b}.\mathsf{R}^{-1} & \to & \mathsf{S}'.. = {}^{t}\mathsf{R}^{-1}\mathsf{S}..\mathsf{R}^{-1} & \text{（共変テンソル）} \\
(\boldsymbol{a}^{\cdot}\circ\boldsymbol{b}.)' = \mathsf{R}\boldsymbol{a}^{\cdot}\circ\boldsymbol{b}.\mathsf{R}^{-1} & \to & \mathsf{U}'^{\cdot}. = \mathsf{R}\mathsf{U}^{\cdot}.\mathsf{R}^{-1} & \text{（混合テンソル）}
\end{array}
$$

ベクトルを含め，テンソルの行列積は上下ドットが連続してキャンセルされる場合にのみ意味をもつ。この操作を**縮約**という。

計量テンソルは，

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}^{\cdot}\mathsf{G}..d\boldsymbol{x}^{\cdot}$$

が不変量になることから，2 階の共変テンソルであることがわかる。また，$\mathsf{G}..$ はドットを 1 個下げる作用をもつ。すなわち，

$$\mathsf{G}..\boldsymbol{a}^{\cdot} = \boldsymbol{a}. \qquad\qquad \mathsf{G}..\mathsf{U}^{\cdot}. = \mathsf{U}..$$

したがってまた，$\mathsf{G}..^{-1} = \mathsf{G}^{\cdot\cdot}$ は反変テンソルでドットを 1 個上げる作用をもつ。すなわち，

$$\mathsf{G}^{\cdot\cdot}\boldsymbol{a}. = \boldsymbol{a}^{\cdot} \qquad\qquad \mathsf{U}^{\cdot}.\mathsf{G}^{\cdot\cdot} = \mathsf{U}^{\cdot\cdot}$$

となる。

以上の上下ドットの表記は，

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

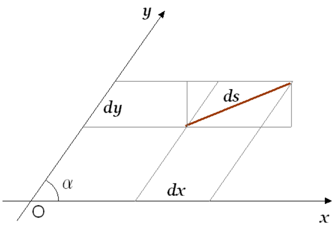
のようにテンソルの成分表示の上下の添字にならったもので，一般的な表記法ではない。今後，反変・共変の区別を明示する必要に応じて使用することにする。

問 1-2　斜交軸の場合に，共変ベクトルは座標軸への正射影を成分とすることを確かめよ。

1　ベクトルとテンソル　― 斜交軸 ―

1.1　計量とスカラー積

相対論においてすべての物理現象は，4 次元時空上の幾何学として表現できる。そこで一般的な空間における微分幾何学の基礎をおさえておくことが，理解に大きく役立つ。ここでは，平面上の斜交軸を例にとって，入門としよう。



2 次元平面上に角 α で交差する x-y 軸をとる。平面上の距離 ds に対して，次が与えられる。

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (dx + dy\cos\alpha)^2 + (dy\sin\alpha)^2 \\
&= dx^2 + 2\cos\alpha \cdot dxdy + dy^2
\end{aligned}
$$

この 2 次形式を，与えられた空間の与えられた座標による**計量**という。

これは，**計量テンソル**

$$
\mathsf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}
$$

を用いて

$$
ds^2 = d\boldsymbol{x}\,\mathsf{G}\,d\boldsymbol{x} = (dx, dy)\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}
$$

と書ける。計量テンソルは，いつも対称であるようにとることができるから，今後は便宜のためにすでに対称化されているものとしてあつかう。

さて計量によって明らかなように斜交軸においては，回転等の等長変換に対して不変量をなすべきベクトルのスカラー積（内積）は，計量テンソ

ルを間にはさんだ積によって与えられる。すなわち，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\,\mathsf{G}\,\boldsymbol{b} &= (a_x, a_y)\begin{pmatrix}1 & \cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_x\\ b_y\end{pmatrix}\\ &= a_xb_x+(a_xb_y+a_yb_x)\cos\alpha+a_yb_y\end{aligned}$$

このとき変換は，

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{RGR}\,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\,\mathsf{G}\,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

となるから，計量テンソルの性質として

$${}^{\mathrm{t}}\mathsf{RGR}=\mathsf{G}$$

が得られる。

問 1-1　2 次元の斜交軸に対する回転 R を求め，ベクトルのスカラー積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ が変換の不変量であることを直接の計算によって示せ。

1.2　テンソル

ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の直積

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix}(b_x, b_y)=\begin{pmatrix}a_xb_x & a_xb_y\\ a_yb_x & a_yb_y\end{pmatrix}$$

を考えるとき，等長変換 R によって

$$(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'\circ\boldsymbol{b}'=(\mathsf{R}\boldsymbol{a})\circ(\mathsf{R}\boldsymbol{b})=\mathsf{R}\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{R}$$

と変換される。一般にベクトルの直積と同じ形式をもち，

$$\mathsf{T}'=\mathsf{RT}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{R}$$

という変換を受ける量 T を 2 階のテンソルといい，2 次元平面においては 2×2 行列で表される。n 個の R によって変換する量が n 階テンソルだから，

$$\boldsymbol{a}' = \mathsf{R}\boldsymbol{a}$$

と変換されるベクトル $\boldsymbol{a}$ は 1 階テンソル，変換を受けないスカラー

$$\phi' = \phi$$

は 0 階テンソルである。

さて，直交軸の場合にはたとえば,

$$(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

となるが，斜交軸では $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\mathsf{G}\boldsymbol{c}$ だから，上の積 $(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ は一般に意味をなさない。この場合，意味をなす積をつくるためには間に G をはさまなくてはならない。すなわち，

$$(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})\mathsf{G}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

同様にして，

$$\boldsymbol{c}\mathsf{G}(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

となる。

ここで $\mathsf{G}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\cdot}$ と表すことにすると，

$$\boldsymbol{a}_{\cdot}' = \mathsf{G}\boldsymbol{a}' = \mathsf{G}\mathsf{R}\boldsymbol{a} = {}^{t}\mathsf{R}^{-1}\mathsf{G}\boldsymbol{a} = {}^{t}\mathsf{R}^{-1}\boldsymbol{a}_{\cdot}$$

と変換する。ここで，計量テンソルの性質 ${}^{t}\mathsf{R}\mathsf{G}\mathsf{R} = \mathsf{G}$ より $\mathsf{G}\mathsf{R} = {}^{t}\mathsf{R}^{-1}\mathsf{G}$ となることを用いた。$\boldsymbol{a}_{\cdot}$ のように，${}^{t}\mathsf{R}^{-1}$ によって変換するベクトルを共変ベクトルといい，もとのベクトル $\boldsymbol{a}$ のように R によって変換するベクトルを反変ベクトルという。反変ベクトルであることを明示するためには $\boldsymbol{a}^{\cdot}$ と書くことにしよう。すると，

$$\boldsymbol{a}^{\cdot}\boldsymbol{b}_{\cdot} = \boldsymbol{a}\mathsf{G}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

となるが，上下のドットが積においてキャンセルされてスカラーとなったと見ることができる。

さて，$\boldsymbol{\alpha}$ と A を決めるにあたってインタバル（時空間隔）ds が変換の不変量であることを用いる。すなわち，

$$ds'^2 = dct'^2 - d\boldsymbol{x}'^2 = dct^2 - d\boldsymbol{x}^2 = ds^2$$

or

$$(dct', d\boldsymbol{x}')\ \mathsf{G}\ \begin{pmatrix} dct' \\ d\boldsymbol{x}' \end{pmatrix} \quad = \quad (dct, d\boldsymbol{x})\ \mathsf{G}\ \begin{pmatrix} dct \\ d\boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathsf{I} \end{pmatrix}$$

ここに，G はミンコフスキー時空の計量テンソルと呼ばれる。

$$d\mathsf{x}' = \mathsf{L}d\mathsf{x}$$

を代入すれば，

$$\begin{aligned} d\mathsf{x}\ {}^{\mathrm{t}}\mathsf{L}\,\mathsf{G}\,\mathsf{L}\,d\mathsf{x} &= d\mathsf{x}\,\mathsf{G}\,d\mathsf{x} \\ \therefore\quad {}^{\mathrm{t}}\mathsf{L}\,\mathsf{G}\,\mathsf{L} &= \mathsf{G} \end{aligned}$$

を得る。これは斜交軸の場合の ${}^{\mathrm{t}}\mathsf{RGR} = \mathsf{G}$ と同じである。成分をあらわに書けば，

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 - \boldsymbol{\beta}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}\cdot\mathsf{A}\boldsymbol{\beta} & \gamma\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{AA} \\ \gamma\boldsymbol{\alpha} + {}^{\mathrm{t}}\mathsf{AA}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\alpha} - {}^{\mathrm{t}}\mathsf{AA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathsf{I} \end{pmatrix}$$

すなわち，

$$\begin{cases} \gamma^2 - (\mathsf{A}\boldsymbol{\beta})^2 = 1 & (1) \\ \gamma\boldsymbol{\alpha} + {}^{\mathrm{t}}\mathsf{AA}\,\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} & (2) \\ \boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\alpha} - {}^{\mathrm{t}}\mathsf{AA} = -\mathsf{I} & (3) \end{cases}$$

(2) に左から $\boldsymbol{\beta}$ をかけて，(1) を代入すると

$$\begin{aligned} \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha} + (\mathsf{A}\boldsymbol{\beta})^2 = \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \gamma^2 - 1 &= 0 \\ \text{i.e.}\quad \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} &= -\gamma\boldsymbol{\beta}^2 \\ \therefore\quad \boldsymbol{\alpha} &= -\gamma\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

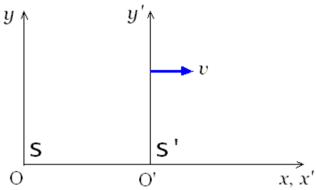
2　ローレンツ変換

2.1　ローレンツ変換の一般化

慣性系 $\mathrm{S}(ct, x, y, z)$ に対して，速度

$$\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$$

をもつ慣性系 $\mathrm{S}'(ct', x', y', z')$ への座標変換は，両者の座標軸を同じ向きにとり $t = t' = 0$ で両者の原点が一致したとすれば,



$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

または,

$$\mathsf{x}' = \mathsf{L}_x \mathsf{x}$$

と書ける。これを x 方向へのローレンツ変換と呼ぶなら，任意方向へのローレンツ変換はどうなるだろうか？　この一般化のためには，ひとつの方法として空間座標の回転を用いる手がある。$\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \boldsymbol{v}/c$ の場合,

(1)	x 軸を$\boldsymbol{\beta}$方向に向ける回転	R
(2)	x 方向へのローレンツ変換	L_x
(3)	座標軸をもとの方向へもどす回転	R^{-1}

を順に $\mathsf{x} = (ct, x, y, z)$ にほどこせばよい。すなわち,

$$\mathsf{x}' = \mathsf{L}\mathsf{x} \quad , \quad \mathsf{L} = \mathsf{R}^{-1}\mathsf{L}_x\mathsf{R} \quad .$$

　ここで (1) の回転のしかたはいくらでもあるが，いずれにせよ x 軸を $\boldsymbol{\beta}$ 方向に向けるのだから，

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_x/\beta & \beta_y/\beta & \beta_z/\beta \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \longrightarrow \boldsymbol{\beta}\text{方向への方向余弦, ただし}\beta = |\boldsymbol{\beta}| \\ \\ \\ \end{matrix}$$

という形になる。また，(3) の逆回転は R の直交性により $\mathsf{R}^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\mathsf{R}$ である。以上により一般のローレンツ変換は，

$$\begin{aligned} \mathsf{L} &= {}^{\mathrm{t}}\mathsf{R}\mathsf{L}_x\mathsf{R} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & \gamma\beta_x^2/\beta^2 + a^2 + d^2 & \gamma\beta_x\beta_y/\beta^2 + ab + de & \gamma\beta_x\beta_z/\beta^2 + ac + df \\ -\gamma\beta_y & \gamma\beta_y\beta_x/\beta^2 + ba + ed & \gamma\beta_y^2/\beta^2 + b^2 + e^2 & \gamma\beta_y\beta_z/\beta^2 + bc + ef \\ -\gamma\beta_z & \gamma\beta_z\beta_x/\beta^2 + ca + fd & \gamma\beta_z\beta_y/\beta^2 + cb + fe & \gamma\beta_z^2/\beta^2 + c^2 + f^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで R の空間部分の列ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \beta_x/\beta \\ a \\ d \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \beta_y/\beta \\ b \\ e \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} \beta_z/\beta \\ c \\ f \end{pmatrix}$$

は，もとの座標軸の新しい軸に対する方向余弦だから，

$$\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

の関係がある。これは，R の直交性 ${}^{\mathrm{t}}\mathsf{R}\mathsf{R} = \mathsf{I}$（I は恒等変換）と同じであることはいうまでもない。たとえば，

$$\beta_x^2/\beta^2 + a^2 + d^2 = 1 \quad , \quad \beta_x\beta_y/\beta^2 + ab + de = 0 \quad , \text{etc.}$$

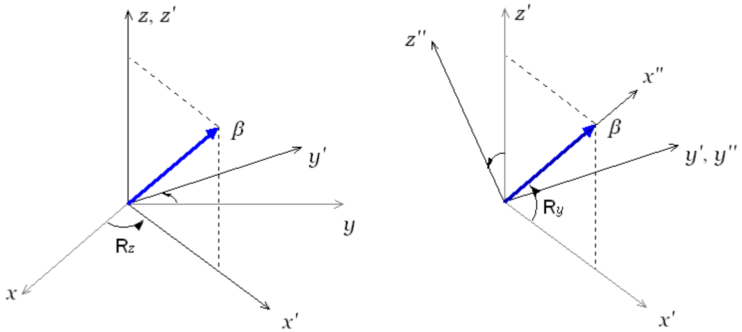
これらを用いて整理すると，

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathsf{I} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

を得る。

問 2-1　回転 R を次のように選んで，L を導出せよ。

$$
\mathsf{R} = \mathsf{R}_y \mathsf{R}_z
$$
$$
\begin{cases} \mathsf{R}_z & ：z \text{ 軸まわり回転で} \beta'_y = 0 \text{ とする} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta}' = (\beta'_x, 0, \beta'_z) \\ \mathsf{R}_y & ：y' \text{軸まわり回転で} \beta''_z = 0 \text{ とする} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta}'' = (\beta, 0, 0) \end{cases}
$$



2.2　普遍的なローレンツ変換の導出

ふり出しにもどって，はじめから $\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ 方向へのローレンツ変換 L $(\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{S}')$ を導いてみよう。逆変換が $\boldsymbol{\beta} \rightarrow -\boldsymbol{\beta}$ のおきかえをしたものに等しくほぼ同じ形になるべきことから，ローレンツ変換は 1 次変換になるであろう。そこで，求める変換を

$$
\begin{cases} dct' = \gamma\, dct + \boldsymbol{\alpha} \cdot d\boldsymbol{x} \\ d\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\,(d\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\beta}\, dct) \end{cases} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}
$$

or

$$
d\mathsf{x}' = \mathsf{L}\, d\mathsf{x}, \qquad \mathsf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & \boldsymbol{\alpha} \\ -\mathsf{A}\boldsymbol{\beta} & \mathsf{A} \end{pmatrix}, \qquad d\mathsf{x} = \begin{pmatrix} dct \\ d\boldsymbol{x} \end{pmatrix}
$$

とおく。$\boldsymbol{\alpha}$，A は変換の係数によってつくられる行ベクトルおよび 3×3 行列を示す。ここでいくらか手間を省くために，次の 2 点を考慮した。

$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ における時間は，S$'$ 系から見ると $t' = \gamma t$ となる。
$\boldsymbol{x}' = \mathbf{0}$ は S 系から見ると $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}t = \boldsymbol{\beta}ct$ である。

となるが，$E_0 = m_0 c^2$ は粒子の静止エネルギーである。またこの式は，粒子のエネルギーと運動量の関係式としてもよく知られる。すなわち，

$$E = \sqrt{{m_0}^2 c^4 + \boldsymbol{p}^2 c^2}$$

であり，非相対論的な場合の関係

$$E = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$$

に対応する。さらに，$m_0 = 0$ としたときの $E = pc$ は，光子のエネルギー - 運動量関係として有用なものである。

3.3　運動方程式

　粒子の運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \quad , \quad \boldsymbol{p} = m(v)\boldsymbol{v} = \gamma m_0 \boldsymbol{v}$$

は，質量を速さの関数 $m(v)$ と考えることで相対論的効果を吸収しているが，3 次元ベクトル方程式であるためローレンツ変換によって形を変えてしまう。したがってこれを 4 元化することを考えよう。もちろん，4 元速度をつくったときと同じように dt ではなく $d\tau$ で割ればよい。すなわち，

$$\frac{d\mathsf{p}}{d\tau} = \mathsf{f} \quad , \quad \mathsf{p} = (E/c, \boldsymbol{p}) = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \boldsymbol{v})$$

これが 4 元運動方程式である。右辺の $\mathsf{f} = (f^0, \boldsymbol{f})$ は 4 元力ということになるが，3 次元力 $\boldsymbol{F}$ との関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{f} &= \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \gamma \boldsymbol{F} \end{aligned}$$

時間成分は粒子が受ける仕事率に相当することがわかる。したがってまた，4 元運動方程式の空間成分はもちろん 3 次元運動方程式に当たり，時間成分はエネルギー原理に該当する。

(3) より,

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathsf{I} + \gamma^2 \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta} $$

$(\boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta})^2 = \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^2 \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta}$ を考慮して $\mathsf{A} = \mathsf{I} + \lambda \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta}$ とおくと,

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}\mathsf{A} = (\mathsf{I} + \lambda \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta})^2 = \mathsf{I} + (2\lambda + \lambda^2 \boldsymbol{\beta}^2) \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta} $$

ゆえに,

$$ \beta^2 \lambda^2 + 2\lambda - \gamma^2 = 0 $$

$\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)$ のとき $\mathrm{A}_{11} = 1 + \lambda \beta^2 = \gamma$ となることから,

$$ \lambda = \frac{\gamma^2}{1+\gamma} $$

が適する解である。また，このとき

$$ \mathsf{A}\boldsymbol{\beta} = \left(\mathsf{I} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\, \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta} \right) \boldsymbol{\beta} = \gamma \boldsymbol{\beta} $$

以上から，再び次のローレンツ変換を得る。

$$ \mathsf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta} \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & \mathsf{I} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\, \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} $$

3　4 元ベクトル

3.1　4 元速度

　時空座標の変位すなわち 4 元変位

$$d\mathsf{x} = (dct, dx, dy, dz) = (dct, d\boldsymbol{x})$$

は，それ自体時空のベクトルと考えることができる。空間変位 $d\boldsymbol{x} = (dx, dy, dz)$ が 3 次元回転 R に対してその長さ $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ を変えないのと同様に，4 元ベクトルはローレンツ変換 L に対してその「長さ」＝インタバルを変えない。ローレンツ変換は 4 次元時空の擬似的な「回転」と見ることができるのである。

$$\begin{aligned} ds'^2 &= d\mathsf{x}'\mathsf{G}d\mathsf{x}' \\ &= d\mathsf{x}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{LGL}d\mathsf{x} \\ &= d\mathsf{x}\mathsf{G}d\mathsf{x} = ds^2 \end{aligned}$$

光のダイヤグラム（世界線）上で $ds^2 = dct^2 - d\boldsymbol{x}^2 = 0$ だから，上記は光速不変の原理を含んでいる。

　空間ベクトルと同様に，一般の 4 元ベクトルを考えることができる。すなわち，

$$\mathsf{a} = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \boldsymbol{a})$$

において，

$$\mathsf{a}' \cdot \mathsf{a}' = \mathsf{a}'\mathsf{G}\mathsf{a}' = \mathsf{aGa} = \mathsf{a} \cdot \mathsf{a}$$

は時空のスカラー（不変量）となる。

　4 元変位に対して 4 元速度を考えることができる。ただし，3 次元速度ベクトル $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$ のように，それ自体 4 元変位の成分である dt で割ったのではローレンツ変換にしたがう 4 元ベクトルとはなりえない。そこで，それ自体変換のスカラーである固有時間

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}$$

で割る。すなわち，

$$\mathsf{u} = \frac{d\mathsf{x}}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = (\gamma c, \gamma \boldsymbol{v})$$

これが 4 元速度となり，ローレンツ変換にしたがう 4 元ベクトルである。その「長さ」＝始点と終点のインタバルは光速 c となり，むろん不変量である。

$$\mathsf{u} \cdot \mathsf{u} = \mathsf{uGu} = \gamma^2 (c^2 - \boldsymbol{v}^2) = c^2$$

上記の表式の中の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\beta}, \gamma$ はあくまで注目している運動点（粒子）のものであり，ローレンツ変換の中のものとは区別されるから注意したい。

問 3-1　u の変換から速度の合成則を導出せよ。

3.2　4 元運動量

4 元速度に粒子の（静止）質量をかけた量は当然 4 元ベクトルを構成し，4 元運動量という。

$$\mathsf{p} = m_0 \mathsf{u} = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \boldsymbol{v}) = (E/c, \boldsymbol{p})$$

その時間成分は粒子のエネルギー

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

を c で割ったもので，空間成分は運動量となる。エネルギーと運動量が同一の 4 元ベクトルの成分として統一されることになる。したがって 4 元運動量をモメナジー

momentum + energy = momenergy

と呼ぶこともある。モメナジーによってつくられる不変量は,

$$\mathsf{p} \cdot \mathsf{p} = E^2/c^2 - \boldsymbol{p}^2 = \gamma^2 {m_0}^2 (c^2 - \boldsymbol{v}^2) = {m_0}^2 c^2 = {E_0}^2/c^2$$

とも書ける。第 1 式をこれと比較することにより，4 元ポテンシャル

$$\mathsf{A}^{\cdot} = (\phi/c, \boldsymbol{A}) \quad , \quad \mathsf{A}_{\cdot} = \mathsf{G}_{\cdot\cdot}\mathsf{A}^{\cdot} = (\phi/c, -\boldsymbol{A})$$

を用いれば，電場と磁場は次の共変反対称テンソルに統一できる。

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_{\cdot\cdot} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{E}/c \\ -\boldsymbol{E}/c & -*\boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\partial}_{\cdot} \circ \mathsf{A}_{\cdot} - {}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\partial}_{\cdot} \circ \mathsf{A}_{\cdot}) \\
&, \quad *\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \nabla \circ \boldsymbol{A} - {}^{\mathrm{t}}(\nabla \circ \boldsymbol{A}) = *(\nabla \times \boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

電磁場テンソル F に対する反変テンソルは,

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}^{\cdot\cdot} = \mathsf{G}^{\cdot\cdot}\mathsf{F}_{\cdot\cdot}\mathsf{G}^{\cdot\cdot} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{E}/c \\ -\boldsymbol{E}/c & -*\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathsf{I} \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{E}/c \\ \boldsymbol{E}/c & -*\boldsymbol{B} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。

電磁場テンソルの最も簡単な出番を与えよう。電荷 q があるとき,

$$\begin{aligned}
\mathsf{f}^{\cdot} = q\,\mathsf{F}^{\cdot\cdot}\mathsf{u}_{\cdot} \quad &= \quad q \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{E}/c \\ \boldsymbol{E}/c & -*\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma c \\ -\gamma \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \\
&= \quad \gamma q \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これは，ローレンツ力の 4 元表現である。

ところで，電磁場テンソル F を与える前提となった 4 元ポテンシャル A は，4 元ベクトルを構成するのであろうか？　これが保証されないと F はテンソルにならず，相対論においては使い道のないものになってしまう。そこで，電磁場の方程式よりポテンシャル A の具体的表式を求め，4 元ベクトルになることを証明する手段もあるが，ここではマックスウェル方程式からローレンツ条件を満たすように選んだポテンシャルが，共変的な波動方程式を満たすことを調べ，間接的にポテンシャルが 4 元ベクトルをなすことを示すにとどめよう。

問 3-2　光子のモメナジー

$$\mathsf{p} = (E/c, \boldsymbol{p}) = (h\nu/c, \boldsymbol{p})$$

に対してローレンツ変換をほどこすことにより，光のドップラー効果の表式を導出せよ。

4　電磁場

4.1　微分演算子

時空座標による微分演算子

$$\boldsymbol{\partial} = \frac{\partial}{\partial \mathsf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

は，形式的に時空のベクトルを構成し，そのままで（符号を変えずに）共変ベクトルである。なぜならば，スカラー ϕ に対して，

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{\partial}' \phi = {}^{\mathrm{t}}\mathsf{L}^{-1} \boldsymbol{\partial} \phi$$

となるからである。ここで，

$$\mathsf{L} = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) = {}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\partial} \circ \mathsf{x}')$$

と書けることを用いた。

反変ベクトル a で表される 4 元ベクトル場があるとき，微分演算子との内積

$$\boldsymbol{\partial} \cdot \mathsf{a} = \boldsymbol{\partial} . \mathsf{a}^{\cdot} = \frac{\partial a^0}{\partial ct} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

は，4 次元的発散を構成し，変換の不変量となる。また，スカラー ϕ に対して，

$$\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} \phi = \boldsymbol{\partial} . \mathsf{G}^{\cdot\cdot} \boldsymbol{\partial} . \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial ct^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Box \phi$$

は不変量となる。ダランベール演算子□は，ラプラス演算子 $\triangle$ の 4 元拡張となっている。

4.2　4 元電流密度

空間の電荷分布が電荷密度 ρ によって与えられているとき，ある位置 $\boldsymbol{x}$ において微小領域の電荷が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動していると，その微小体積はローレンツ短縮によって $\boldsymbol{v}$ 方向に $1/\gamma$ に縮んで見えるから，

$$\rho = \gamma\rho_0 \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}$$

となる。ただし，ρ_0 はともに動く系で見た固有電荷密度である。また，その位置における電流密度は,

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v} = \gamma\rho_0\boldsymbol{v}$$

となる。そこで 4 元電流密度を

$$\mathsf{J} = \rho_0\mathsf{u} = (\gamma\rho_0 c, \gamma\rho_0\boldsymbol{v}) = (\rho c, \boldsymbol{j})$$

と定義すれば，これは 4 元ベクトルとしてローレンツ変換にしたがう。

4 元電流密度 J の 4 次元的発散は,

$$\boldsymbol{\partial}\cdot\mathsf{J} = \boldsymbol{\partial}.\mathsf{J}^{\cdot} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \qquad \text{i.e.} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

となるべきで，電荷の保存を示す。

4.3　4 元ポテンシャルと電磁場テンソル

電場および磁場は，スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} &= \nabla\times\boldsymbol{A} \end{aligned}$$

と与えられる。第 2 式は磁場の反対称テンソル表現を用いると,

$$*\boldsymbol{B} = \nabla\circ\boldsymbol{A} - {}^{\mathrm{t}}(\nabla\circ\boldsymbol{A}) \quad , \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

解答解説

0-1

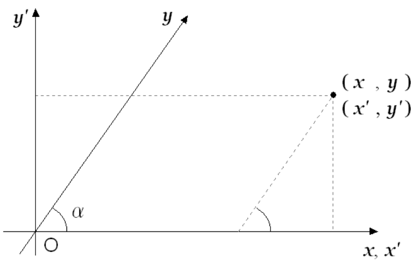
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} 0 & a_x b_y - b_x a_y & a_x b_z - b_x a_z \\ a_y b_x - b_y a_x & 0 & a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x & a_z b_y - b_z a_y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_z & -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_y \\ -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_z & 0 & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_x \\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_y & -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= *(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

0-2

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= *(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \\
&= (\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\circ\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

1-1

まず，交差角 α の斜交軸から直交軸への変換 Q は，



$$
\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{Q}^{-1} = \frac{1}{\sin\alpha}\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

直交軸の角 θ の回転 R_0 は，

$$
\mathrm{R}_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

4.4　電磁ポテンシャルの 4 元性

もともとスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とは，マックスウェル方程式が記述する電磁場の性質からその存在が要請されるものである。なぜならば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} & \longrightarrow \quad & \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \boldsymbol{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} & \longrightarrow \quad & \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

という関連をもつからである。さらに，ポテンシャルは座標による微分によって電磁場をつくるから任意性をもつが，いわゆるローレンツゲージ条件（Lorenz はローレンスともいわれ，ローレンツ変換の Lorentz とは別）

$$\boldsymbol{\partial}.\mathsf{A}^{\cdot} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

を課せば，残る 2 つの方程式から

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \longrightarrow \quad & \triangle\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} & \longrightarrow \quad & \triangle \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

が得られる。これは 4 元ポテンシャル $\mathsf{A} = (\phi/c, \boldsymbol{A})$ に対する波動方程式

$$\Box\, \mathsf{A}^{\cdot} = -\mu_0 \mathsf{J}^{\cdot} \quad , \quad \Box = \boldsymbol{\partial}.\mathsf{G}^{\cdot\cdot}\boldsymbol{\partial}.$$

にまとめることができる。ここで 4 元電流密度 J は 4 元ベクトル，ダランベール演算子□はスカラーとしてローレンツ変換にしたがうから，A は 4 元ベクトルであることが示されたことになる。

問 4-1　上の波動方程式までの計算過程を確認せよ。

4.5　マックスウェル方程式

古典的なニュートンの運動方程式から 4 元運動方程式への拡張は，法則自体に大幅な変更を余儀なくされたわけだが，マックスウェルの電磁場の方程式は，生まれたときからもともと相対論的であり，本質的な内容はそのまま引き継がれる。しかし，次の 4 つの方程式は 3 次元ベクトル方程式であるから，われわれはこれを 4 元テンソル方程式に書き換えなければならない。そうすることによってローレンツ変換において形式を変えない共変的な方程式ができあがる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad\text{（ガウスの法則）}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\qquad\text{（アンペール - マックスウェルの法則）}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\text{（単磁極の不在）}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\text{（ファラデーの法則）}$$

上 2 式は $\mathsf{J}=(\rho c,\boldsymbol{j})$ を含んでいるから右辺に J を含むテンソル方程式にまとめられそうだ。実際 $\mathsf{F}^{\cdot\cdot}$ の 4 次元発散を考えると，

$$\boldsymbol{\partial}.\mathsf{F}^{\cdot\cdot}=\left(\frac{\partial}{\partial ct},\quad\nabla\right)\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{E}/c\\ \boldsymbol{E}/c & -*\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}/c,\quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{B}\right)$$

となるから，

$$\boldsymbol{\partial}.\mathsf{F}^{\cdot\cdot}=\mu_0\,\mathsf{J}^{\cdot}$$

これが上 2 式を共変的に書き換えたものになる。一方，下 2 式は上 2 式に対して $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の役割が入れ替わっているから，$\mathsf{F}^{\cdot\cdot}$ に対して双対（dual）をなすテンソル

$$*\mathsf{F}^{\cdot\cdot}=\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & *\boldsymbol{E}/c\end{pmatrix}$$

を使うのがわかりやすい。$*\mathsf{F}^{\cdot\cdot}$ の 4 次元発散をとると，

$$\boldsymbol{\partial}.*\mathsf{F}^{\cdot\cdot}=\left(\frac{\partial}{\partial ct},\quad\nabla\right)\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & *\boldsymbol{E}/c\end{pmatrix}=\left(\nabla\cdot\boldsymbol{B},\quad -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\frac{1}{c}\nabla\times\boldsymbol{E}\right)$$

となるから，

$$\boldsymbol{\partial}.*\mathsf{F}^{\cdot\cdot} = 0$$

これが下 2 式の共変的表現である。

電磁場のテンソルに対してローレンツ変換をほどこして，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ がどう変換されるか見てみよう。

$$\mathsf{F}'^{\cdot\cdot} = \mathsf{L}\mathsf{F}^{\cdot\cdot}\,{}^{t}\mathsf{L}$$

これに，

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta} \\ \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathsf{I} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\ \boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

および前述の $\mathsf{F}^{\cdot\cdot}$ を用いて計算すると，

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{E} + \gamma\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{\beta} \\ \\ \boldsymbol{B}' = \gamma\boldsymbol{B} - \gamma\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}/c - \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\beta} \end{cases}$$

を得る。

問 4-2　上の変換を確認せよ。

ただし，

$$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \quad , \quad \gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2} \quad , \quad \gamma_w = 1/\sqrt{1-w^2/c^2}$$

とおいた。したがって，

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \gamma_w c & = & \gamma\gamma_u (c + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}) \\ \gamma_w \boldsymbol{w} & = & \gamma\gamma_u c\boldsymbol{\beta} + \gamma_u \boldsymbol{u} + \dfrac{\gamma^2\gamma_u}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{\beta} \\ & = & \gamma\gamma_u \left\{ 1 + \dfrac{\gamma(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{(1+\gamma)c^2} \right\} \boldsymbol{v} + \gamma_u \boldsymbol{u} \end{array} \right.$$

γ_u/γ_w を消去すると，

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma(1+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}/c^2)} \left\{ \boldsymbol{u} + \gamma \left(1 + \frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2} \right) \boldsymbol{v} \right\}$$

を得る。特に $\boldsymbol{u} = (u,0,0)$，$\boldsymbol{v} = (v,0,0)$ のときは，

$$w = \frac{u + \gamma\left(v + \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} u \right)}{\gamma(1+uv/c^2)} = \frac{u+v}{1+uv/c^2}$$

となる。

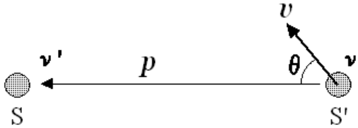
3-2

モメナジーの変換は，

$$\begin{pmatrix} h\nu'/c \\ \boldsymbol{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{I} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h\nu/c \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$$

すなわち ν の変換は，

$$\begin{array}{rcl} \nu' & = & \gamma\nu - \dfrac{\gamma\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{h} \\ & = & \gamma\nu - \dfrac{\gamma p v}{h}\cos\theta \\ & = & \gamma(1-\beta\cos\theta)\nu \end{array}$$



と書ける。したがって斜交軸に対する回転 R は,

$$\mathsf{R} = \mathsf{Q}^{-1}\mathsf{R}_0\mathsf{Q} = \frac{1}{\sin\alpha}\begin{pmatrix} \sin(\alpha+\theta) & \sin\theta \\ -\sin\theta & \sin(\alpha-\theta) \end{pmatrix}$$

となる。示すべき関係は,

$$\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\mathsf{RGR}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\mathsf{G}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

だから, ${}^{\mathrm{t}}\mathsf{RGR} = \mathsf{G}$ を確認すれば十分である。

${}^{\mathrm{t}}\mathsf{RGR}$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix} \sin(\alpha+\theta) & -\sin\theta \\ \sin\theta & \sin(\alpha-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(\alpha+\theta) & \sin\theta \\ -\sin\theta & \sin(\alpha-\theta) \end{pmatrix}$$

$\cdots$　途中計算略

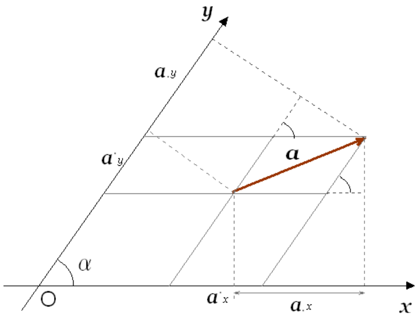
$$= \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{G}$$

1-2

交差角 α の斜交軸において, 反変ベクトル $\boldsymbol{a}^{\cdot} = (a_x\,,\,a_y)$ に対する共変ベクトルは,

$$\boldsymbol{a}_{\cdot} = \mathsf{G}\boldsymbol{a}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{a}^{\cdot} = \begin{pmatrix} a_x + a_y\cos\alpha \\ a_x\cos\alpha + a_y \end{pmatrix}$$

となるが, これは次の図のとおり座標軸への正射影を成分としている。



2-1

y 軸まわりの回転角 θ，z 軸まわりの回転角 ϕ とすると，

$$\mathsf{R}_y = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & & \sin\theta \\ & & 1 & \\ & -\sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \mathsf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\phi & \sin\phi & \\ & -\sin\phi & \cos\phi & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

となる（回転方向注意）。すると目的の回転は，

$$\mathsf{R} = \mathsf{R}_y\mathsf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。この回転を用いて x 方向へのローレンツ変換を任意方向のものへと書き換えると，

$$\begin{aligned} \mathsf{L} &= \mathsf{R}^{-1}\mathsf{L}_x\mathsf{R} = {}^{\mathrm{t}}\mathsf{R}\mathsf{L}_x\mathsf{R} \\ &\cdots \quad \text{途中計算省略} \\ &= \begin{pmatrix} Ch & -ShC_\theta C_\phi & -ShC_\theta S_\phi & -ShS_\theta \\ & 1+C_\theta^2C_\phi^2(Ch-1) & C_\theta^2C_\phi S_\phi(Ch-1) & S_\theta C_\theta C_\phi(Ch-1) \\ & & 1+C_\theta^2S_\phi^2(Ch-1) & S_\theta C_\theta S_\phi(Ch-1) \\ & & & 1+S_\theta^2(Ch-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし，ここで

$$Ch = \cosh\alpha = \gamma \quad , \quad Sh = \sinh\alpha = \gamma\beta$$

$$C_\theta = \cos\theta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}/\beta \quad , \quad S_\theta = \sin\theta = \beta_z/\beta$$

$$C_\phi = \cos\phi = \beta_x/\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} \quad , \quad S_\phi = \sin\phi = \beta_y/\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}$$

である。また，対称行列のため左下の成分は省略した。$\boldsymbol{\beta}$，γ を代入して整理すると，

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ & 1+\beta_x^2(\gamma-1)/\beta^2 & \beta_x\beta_y(\gamma-1)/\beta^2 & \beta_x\beta_z(\gamma-1)/\beta^2 \\ & & 1+\beta_y^2(\gamma-1)/\beta^2 & \beta_y\beta_z(\gamma-1)/\beta^2 \\ & & & 1+\beta_z^2(\gamma-1)/\beta^2 \end{pmatrix}$$

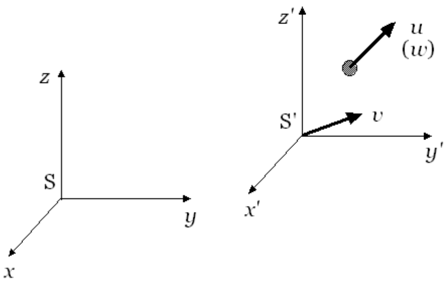
$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathsf{I} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

を得る。

3-1

　S′ 系が S 系に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で運動し，その S′ 系において物体が速度 $\boldsymbol{u}$ をもつとき，S 系から見た物体の速度 $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の合成速度である。

　$\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{w}$ への変換は，



$$\begin{pmatrix} \gamma_w c \\ \gamma_w \boldsymbol{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\boldsymbol{\beta} \\ \gamma\boldsymbol{\beta} & \mathsf{I} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_u c \\ \gamma_u \boldsymbol{u} \end{pmatrix}$$

となるから，

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

これが光のドップラー効果を与える。ただし，光の進行方向に対する光源の速度方向のなす角 θ とし，また光子のエネルギー - 運動量関係 $h\nu = pc$ を用いた。$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{p}$ に対して平行または垂直のときは次のようになる。

$$\theta = 0 \qquad \text{のとき} \quad \nu = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\cdot\nu'$$

$$\theta = \pi \qquad \text{のとき} \quad \nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\cdot\nu'$$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{のとき} \quad \nu = \sqrt{1-\beta^2}\cdot\nu'$$

特に光源の運動方向が光の進行方向に対し垂直の場合は，横ドップラー効果と呼ばれて光波に特有の現象だが，表式で明らかなように，これはいわゆる時間の遅れ $t = \gamma t'$ に起因する「純粋に」相対論的な効果である。

以上の導出過程で，逆変換により

$$\nu = \gamma(1+\beta\cos\theta')\nu'$$

としてもよいと思われるが，S$'$ 系に移れば $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{p}'$ の角も θ' に変わることに注意しなければならない。θ' を θ にもどすのは可能だが骨が折れる。観測者は S 系にいるのだから，直接観測できる θ を使おうと思えば，上記の方法が妥当である。

ちなみに，$\boldsymbol{p}$ の変換は見る系のちがいによる光の進行方向の変化を与えると同時に，その大きさについては $p = h\nu/c$ であるから ν の変換と同じ結果を与える。計算してみるといいだろう。

4-1　（略）　※　下記に注意。

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A}$$

4-2　（略）　※　下記などに注意。

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{\beta}$$

$$*\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B} \quad , \quad \boldsymbol{\beta}*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{\beta} = *(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E})$$

$$\boldsymbol{\beta} \circ (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{\beta} = *\{\boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B})\} = *\{(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{\beta} - \beta^2 \boldsymbol{B}\}$$

$$\frac{\gamma^2\beta^2}{1+\gamma} = \gamma - 1$$

参考文献

[1] 平川浩正：『相対論』（共立出版，1971）

[2] ランダウ，リフシッツ：『場の古典論』第 6 版
（恒藤敏彦，広重徹訳，東京図書，1978）

[3] 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）

[4] 冨田憲二：『相対性理論』（丸善，1990）

[5] 戸田盛和：『相対性理論 30 講』（朝倉書店，1997）

[6] 太田浩一：『電磁気学　』（丸善，2002）