相対性理論数学ノート

高橋　善樹

１．特殊相対性理論

$x := 1$
$x := x$
$y := 1$
$y := y$
$z := 1$
$z := z$

$x' := 1$
$x' := x'$
$y' := 1$
$y' := y'$
$z' := 1$
$z' := z'$

1.1 ローレンツ変換

３次元の平らな空間に対して，２点間の距離dsは，

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.1.1}$$

となるが，座標の回転は，この値を変えない等長変換である。

たとえば，xy平面内での回転は，

$$R(\psi) := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

と表されるが，回転による座標変換（r→r'）は次のようになる。

$$r := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad r' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \quad R(\psi)\cdot r \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\psi)\cdot x + \sin(\psi)\cdot y \\ -\sin(\psi)\cdot x + \cos(\psi)\cdot y \\ z \end{pmatrix}.$$

一方，特殊相対性理論によれば，４次元時空におけるローレンツ変換は，

$$ds^2 = -c^2\cdot dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.1.3}$$

となる時空における「距離」を不変に保つことが要請される。

したがって，ローレンツ変換は４次元時空の擬似的な「回転」として表され，

$ct := 1$
$ct := ct$
$ct' := 1$
$ct' := ct'$

$$L(\psi) := \begin{pmatrix} \cosh(\psi) & -\sinh(\psi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\psi) & \cosh(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

$\psi := 1$
$\psi := \psi$
$c := 1$
$c := c$

とかける。座標変換（r→r'）は，

$$r := \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad r' := \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \quad L(\psi)\cdot r \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\psi)\cdot ct - \sinh(\psi)\cdot x \\ -\sinh(\psi)\cdot ct + \cosh(\psi)\cdot x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

ところで，逆変換（r'→r）は，

$$L_i(\psi) := \begin{pmatrix} \cosh(\psi) & \sinh(\psi) & 0 & 0 \\ \sinh(\psi) & \cosh(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r = \quad L_i(\psi)\cdot r' \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\psi)\cdot ct' + \sinh(\psi)\cdot x' \\ \sinh(\psi)\cdot ct' + \cosh(\psi)\cdot x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

K'系の原点について考えると，x'＝０だから，

$$ct := \cosh(\psi)\cdot ct' \qquad x := \sinh(\psi)\cdot ct'$$

となり，K'系のK系に対する速度をVとすれば，

$$V := c\cdot\frac{x}{ct} \qquad V \rightarrow c\cdot\frac{\sinh(\psi)}{\cosh(\psi)}$$

$\beta := .5$
$\beta := \beta$

すなわち，　$\psi := \operatorname{atanh}(\beta)$ ，　$\beta := \dfrac{V}{c}$

$$\cosh(\psi) \rightarrow \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}, \qquad \sinh(\psi) \rightarrow \frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$L(\psi) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} & \frac{-\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} & \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.1.5)$$

というみなれた形式を得る。したがって座標変換の式は，

$$r' = \quad L(\psi)\cdot r \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot ct - \frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot x \\ \frac{-\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot ct + \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (1.1.6)$$

1.2 ローレンツ変換の一般化

先に求めたローレンツ変換は，系の相対速度をx方向に限定したものであるが，３次元に一般化するために，３次元空間の回転を利用する。
K'のKに対する速度を極座標において（θ，φ）方向とすると，z軸まわりにφだけ座標軸を回転させ，続いて新しい y軸まわりに−(π／2−θ)だけ回転させれば，x軸を速度方向へむけることができる。

$$R_z(\psi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_y(\psi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\alpha_x := 1 \qquad \alpha_x := \alpha_x \qquad \alpha_y := 1 \qquad \alpha_y := \alpha_y \qquad \alpha_z := 1 \qquad \alpha_z := \alpha_z$$

$$R(\theta,\phi) := R_y\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cdot R_z(\phi)$$

$$L_\alpha(\theta,\phi,\psi) := R(\theta,\phi)^{-1}\cdot L(\psi)\cdot R(\theta,\phi) \qquad (1.2.1)$$

（θ，φ）と相対速度の方向余弦（α_x，α_y，α_z）との関係，

$$\theta := \operatorname{acos}(\alpha_z) \quad , \quad \phi := \operatorname{atan}\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x}\right) \qquad \alpha_x^{\,2} + \alpha_y^{\,2} + \alpha_z^{\,2} = 1$$

を考慮して計算すると，

$$L := L_\alpha(\theta,\phi,\psi)$$

$$L_{0,0} \rightarrow \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \qquad L_{0,1} \rightarrow \frac{-\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot\frac{\left(1-\alpha_z^{\,2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\left(1+\frac{\alpha_y^{\,2}}{\alpha_x^{\,2}}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \quad = \quad -\alpha_x\cdot\sinh(\psi)$$

$$L_{2,0} \rightarrow -\left(1-\alpha_z^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\alpha_y}{\left[\alpha_x \cdot \left[\frac{\left(\alpha_x^2+\alpha_y^2\right)}{\alpha_x^2}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]} \cdot \frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} = \quad -\alpha_y \cdot \sinh(\psi)$$

$$L_{1,2} \text{ substitute}, \alpha_z = \sqrt{1-\alpha_x^2-\alpha_y^2}, \text{factor} \rightarrow -\left[-1+\left[-(\beta-1)\cdot(\beta+1)\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \cdot \alpha_x \cdot \frac{\alpha_y}{\left[-(\beta-1)\cdot(\beta+1)\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$L_{3,3} \text{ collect}, \alpha_z \rightarrow \left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} - 1\right] \cdot \alpha_z^2 + 1$$

整理する

$$L := \begin{bmatrix} \cosh(\psi) & -\alpha_x \cdot \sinh(\psi) & -\alpha_y \cdot \sinh(\psi) & -\alpha_z \cdot \sinh(\psi) \\ -\alpha_x \cdot \sinh(\psi) & 1+\alpha_x \cdot \alpha_x \cdot (\cosh(\psi)-1) & \alpha_x \cdot \alpha_y \cdot (\cosh(\psi)-1) & \alpha_x \cdot \alpha_z \cdot (\cosh(\psi)-1) \\ -\alpha_y \cdot \sinh(\psi) & \alpha_y \cdot \alpha_x \cdot (\cosh(\psi)-1) & 1+\alpha_y \cdot \alpha_y \cdot (\cosh(\psi)-1) & \alpha_y \cdot \alpha_z \cdot (\cosh(\psi)-1) \\ -\alpha_z \cdot \sinh(\psi) & \alpha_z \cdot \alpha_x \cdot (\cosh(\psi)-1) & \alpha_z \cdot \alpha_y \cdot (\cosh(\psi)-1) & 1+\alpha_z \cdot \alpha_z \cdot (\cosh(\psi)-1) \end{bmatrix}$$

(1.2.2)

$$L \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, \psi = \operatorname{atanh}(\beta) \\ \text{substitute}, \alpha_x = \frac{\beta_x}{\beta} \\ \text{substitute}, \alpha_y = \frac{\beta_y}{\beta} \\ \text{substitute}, \alpha_z = \frac{\beta_z}{\beta} \end{array} \right. \rightarrow$$

（省略）

$\beta := .5$

$\beta := \beta$

さらに，　$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とおくと，

$$L(\beta_x, \beta_y, \beta_z) := \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \beta_x & -\gamma \cdot \beta_y & -\gamma \cdot \beta_z \\ -\gamma \cdot \beta_x & 1+\frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_x \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ -\gamma \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1+\frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_y \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ -\gamma \cdot \beta_z & \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1+\frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta_z \cdot \beta_z \end{pmatrix}$$

ベクトル成分を添え字 i＝1,2,3でまとめれば，

$$L(\beta_i) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_j \\ -\gamma\beta_i & \delta_{ij} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_i\beta_j \end{pmatrix} \quad . \qquad (1.2.3)$$

なお，この結果からも推測できるように，成分をあらわにしないベクトルおよびその係数としての行列の形式的演算によって，はじめから相対速度の方向を限定せず，したがって回転を使わずに，同じ結果を得る方法もあり，大変エレガントである。

1.3 ローレンツ変換の基本性質

$\psi_1 := 1$

$\psi_1 := \psi_1$

$\psi_2 := 1$

$\psi_2 := \psi_2$

3次元空間の回転を2つ続けて行うとき，一般にそれらの回転は非可換である。
たとえば，(1.2.1)に示した回転について，

$$R_z(\psi_1)\cdot R_y(\psi_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_1)\cdot\cos(\psi_2) & \sin(\psi_1) & -\cos(\psi_1)\cdot\sin(\psi_2) \\ 0 & -\sin(\psi_1)\cdot\cos(\psi_2) & \cos(\psi_1) & \sin(\psi_1)\cdot\sin(\psi_2) \\ 0 & \sin(\psi_2) & 0 & \cos(\psi_2) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\psi_2)\cdot R_z(\psi_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_2)\cdot\cos(\psi_1) & \cos(\psi_2)\cdot\sin(\psi_1) & -\sin(\psi_2) \\ 0 & -\sin(\psi_1) & \cos(\psi_1) & 0 \\ 0 & \sin(\psi_2)\cdot\cos(\psi_1) & \sin(\psi_2)\cdot\sin(\psi_1) & \cos(\psi_2) \end{pmatrix}$$

４次元時空の「回転」というアナロジーから，ローレンツ変換も非可換であることが類推されるが
実際，相対速度 $(v_1, 0, 0)$ の座標系への変換 L_x と，$(0, v_2, 0)$ で動く系への変換 L_y について
，

$$L_x := L_\alpha\left(\frac{\pi}{2}, 0, \psi_1\right) \quad L_y := L_\alpha\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \psi_2\right)$$

$$L_{yx} := L_y\cdot L_x \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) & -\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1) & -\sinh(\psi_2) & 0 \\ -\sinh(\psi_1) & \cosh(\psi_1) & 0 & 0 \\ -\sinh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) & \sinh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1) & \cosh(\psi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{xy} := L_x\cdot L_y \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) & -\sinh(\psi_1) & -\sinh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) & 0 \\ -\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1) & \cosh(\psi_1) & \sinh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1) & 0 \\ -\sinh(\psi_2) & 0 & \cosh(\psi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.3.1)$$

$\theta := 1$

$\theta := \theta$

ここで，$\tanh(\psi_1) = \beta_1 = \frac{v_1}{c}, \tanh(\psi_2) = \beta_2 = \frac{v_2}{c}$ である。

$\phi := 1$

$\phi := \phi$

$\psi := 1$

$\psi := \psi$

$L_{yx} \neq L_{xy}$ であると同時に，いずれも対称行列とならず，「純粋な」ローレンツ変換 L_α に対応しないことが一見してわかる。これらをも包含する一般のローレンツ変換は，L_α と回転 R との積として表される。

たとえば，L_{yx} **について，**

$$L_1 := R_z(\theta)\cdot L_\alpha\left(\frac{\pi}{2}, \phi, \psi\right)$$

$$L_{yx_{0,0}} \rightarrow \cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) \qquad L_{1_{0,0}} \rightarrow \cosh(\psi)$$

$$L_{yx_{0,1}} \rightarrow -\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1) \qquad L_{1_{0,1}} \rightarrow -\sinh(\psi)\cdot\cos(\phi)$$

$$L_{yx_{0,2}} \rightarrow -\sinh(\psi_2) \qquad L_{1_{0,2}} \rightarrow -\sinh(\psi)\cdot\sin(\phi)$$

以上から，

$$\psi := \operatorname{acosh}(\cosh(\psi_1)\cdot\cosh(\psi_2)) \qquad \phi := \operatorname{atan}\left(\frac{\sinh(\psi_2)}{\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1)}\right) \qquad (1.3.2)$$

また，

$$L_{yx_{1,1}} \rightarrow \cosh(\psi_1)$$

$$L_{1_{1,1}} \text{ simplify } \rightarrow \blacksquare$$ （省略）

$$\cosh(\psi_1) = \cos(\theta)\cdot\left[\cos(\phi)^2\cdot(\cosh(\psi) - 1) + 1\right] + \sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot\cos(\phi)\cdot(\cosh(\psi) - 1)$$

θ について解けば，

$$t := \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$t^2 = \frac{1 - x}{1 + x} \qquad x = \cos(\theta) = \frac{\cosh(\psi_2) + \cosh(\psi_1)}{\cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) + 1}$$

$$\theta := \operatorname{acos}\left(\frac{\cosh(\psi_2) + \cosh(\psi_1)}{\cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) + 1}\right) \tag{1.3.3}$$

以上を R_z および L_α に代入すれば，

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\cosh(\psi_1) + \cosh(\psi_2)}{\cosh(\psi_1)\cdot\cosh(\psi_2) + 1} & \dfrac{\sinh(\psi_1)\cdot\sinh(\psi_2)}{\cosh(\psi_1)\cdot\cosh(\psi_2) + 1} & 0 \\ 0 & \dfrac{-\sinh(\psi_1)\cdot\sinh(\psi_2)}{\cosh(\psi_1)\cdot\cosh(\psi_2) + 1} & \dfrac{\cosh(\psi_1) + \cosh(\psi_2)}{\cosh(\psi_1)\cdot\cosh(\psi_2) + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 := L_\alpha\left(\frac{\pi}{2}, \phi, \psi\right)$$

$$L_2^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) \\ -\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1) \\ -\sinh(\psi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L_2^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} -\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1) \\ 1 + \dfrac{\cosh(\psi_2)^2\sinh(\psi_1)^2}{\cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) + 1} \\ \dfrac{\sinh(\psi_1)\cdot\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_2)}{\cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) + 1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} -\sinh(\psi_2) \\ \dfrac{\sinh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1)}{\cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) + 1} \\ 1 + \dfrac{\sinh(\psi_2)^2}{\cosh(\psi_2)\cdot\cosh(\psi_1) + 1} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L_2^{\langle 3\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 := .5 \qquad \beta_1 := \beta_1 \qquad \beta_2 := .5 \qquad \beta_2 := \beta_2$$

ところで，　$\psi_1 := \operatorname{atanh}(\beta_1)$　　$\psi_2 := \operatorname{atanh}(\beta_2)$　とおくと，

$$\tan(\phi) = \frac{\sinh(\psi_2)}{(\cosh(\psi_2)\cdot\sinh(\psi_1))} \rightarrow \frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\left(1 - {\beta_1}^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

したがって L_α は，相対速度 $V = \left(v_1, v_2\sqrt{1 - {\beta_1}^2}, 0\right)$ を持つ系への変換であることが予想されるが，事実，そうなることが速度の合成則により示される。

1.4　速度の合成

$\beta_x := 1 \quad \beta_y := 1 \quad \beta_z := 1$

$\beta_x := \beta_x \quad \beta_y := \beta_y \quad \beta_z := \beta_z$

$\gamma := 1 \quad \gamma := \gamma \quad c := 1 \quad c := c$

$dx' := 1 \quad dx' := dx' \quad dy' := 1 \quad dy' := dy' \quad dz' := 1 \quad dz' := dz' \quad dt' := 1 \quad dt' := dt'$

以下，v, β, dr などは３次元ベクトルとする。(1.2.3)より逆変換は，

$$\beta := \begin{pmatrix} \beta_x & \beta_y & \beta_z \end{pmatrix}$$

$$L_{00} := \gamma \qquad L_{0j} := \gamma \cdot \beta \qquad II := \mathrm{identity}(3)$$

$$L_{i0} := \gamma \cdot \beta^T \qquad L_{ij} := II + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \left(\beta^T \cdot \beta\right)$$

$$L_i(\beta) := \begin{pmatrix} L_{00} & L_{0j} \\ L_{i0} & L_{ij} \end{pmatrix} \qquad \text{(1.4.1)}$$

K' 系が，K 系に対して速度 $v := c \cdot \beta$ で運動しているとすると，座標変換は，

$$c \cdot dt' \qquad dr' := \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad c \cdot dt = L_{00} \cdot c \cdot dt' + L_{0j} \cdot dr' \qquad dt := \frac{1}{c} \cdot \gamma \cdot \left(c \cdot dt' + \beta \cdot dr'\right) \qquad \text{(1.4.2a)}$$

$$dr = L_{i0} \cdot c \cdot dt' + L_{ij} \cdot dr'$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_x \cdot \gamma \cdot c \cdot dt' + \dfrac{\left[dx' \cdot (1+\gamma) + \beta_x \cdot \gamma^2 \cdot \left(dx' \cdot \beta_x + dy' \cdot \beta_y + \beta_z \cdot dz'\right)\right]}{(1+\gamma)} \\ \beta_y \cdot \gamma \cdot c \cdot dt' + \dfrac{\left[dy' \cdot (1+\gamma) + \beta_y \cdot \gamma^2 \cdot \left(dx' \cdot \beta_x + dy' \cdot \beta_y + \beta_z \cdot dz'\right)\right]}{(1+\gamma)} \\ \beta_z \cdot \gamma \cdot c \cdot dt' + \dfrac{\left[dz'(1+\gamma) + \beta_z \cdot \gamma^2 \cdot \left(dx' \cdot \beta_x + dy' \cdot \beta_y + \beta_z \cdot dz'\right)\right]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$$

$$dr = dr' + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \left(\beta \cdot dr'\right) \beta^T + \gamma \cdot \beta^T \cdot c \cdot dt' \qquad \text{(1.4.2b)}$$

したがって，速度の合成は，

$v_1 := 1 \quad v_1 := v_1 \quad v_2 := 1 \quad v_2 := v_2$

$$u' := \frac{dr'^T}{dt'} \quad \rightarrow \quad u = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{u' + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \left(\beta \cdot u'^T\right) \beta + \gamma \cdot v}{1 + \dfrac{v \cdot u'^T}{c^2}} \qquad \text{(1.4.3)}$$

とくに，前節の合成は，

$$u' := \begin{pmatrix} 0 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta := \frac{v}{c}$$

$$u := \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{u' + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \left(\beta \cdot u'^T\right) \beta + \gamma \cdot v}{1 + \dfrac{v \cdot u'^T}{c^2}} \qquad u \rightarrow \begin{pmatrix} v_1 & \dfrac{v_2}{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

となり，推定に一致する。

1.5　4元ベクトル

$$dx_0 := 1 \quad dx_0 := dx_0$$
$$dx_1 := 1 \quad dx_1 := dx_1$$
$$dx_2 := 1 \quad dx_2 := dx_2$$
$$dx_3 := 1 \quad dx_3 := dx_3$$

Minkowski空間のベクトル（変位）を

$$dx^* := \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix}$$

と表せば，２点（事象）間の「距離」＝インタバルは，基本行列（計量テンソル）g_{**}を用いて次のように書ける。

$$g_{**} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ds^2 = dx^* \cdot g_{**} \cdot dx^{*T} \rightarrow ds^2 = -dx_0^{\,2} + dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2}$$

$$A_0 := 1 \quad A_0 := A_0$$
$$A_1 := 1 \quad A_1 := A_1$$
$$A_2 := 1 \quad A_2 := A_2$$
$$A_3 := 1 \quad A_3 := A_3$$
$$B_0 := 1 \quad B_0 := B_0$$
$$B_1 := 1 \quad B_1 := B_1$$
$$B_2 := 1 \quad B_2 := B_2$$
$$B_3 := 1 \quad B_3 := B_3$$

これは，添字による表記に和の規約を適用すれば，

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$$

と書ける。ここで dx の共変成分を　$dx_{\mu} = g_{\mu\nu}\, dx^{\nu}$　で定義すれば，

$ds^2 = dx^{\mu} \cdot dx_{\mu}$　すなわち，

$$dx_* := dx^* \cdot g_{**} \qquad dx_* \rightarrow \begin{pmatrix} -dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dx^* \cdot dx_*^{\,T} \rightarrow ds^2 = -dx_0^{\,2} + dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2} \qquad (1.5.1)$$

$$\partial := 1 \qquad \partial := \partial$$
$$\partial x_0 := 1 \quad \partial x_0 := \partial x_0$$
$$\partial x_1 := 1 \quad \partial x_1 := \partial x_1$$
$$\partial x_2 := 1 \quad \partial x_2 := \partial x_2$$
$$\partial x_3 := 1 \quad \partial x_3 := \partial x_3$$

なお，以上の様に，行列で表現したベクトル・テンソルの反変・共変成分を明示するために上付きおよび下付きの *を今後とも使用することにする。

同様にして，Minkowski空間のベクトル一般について，以下のように，Lorentz変換に対して不変な量として，スカラー積が定義される。

$$\bullet(a^*, b^*) := a^* \cdot g_{**} \cdot b^{*T}$$　（スカラー積演算子の定義）

$$A^* := \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \qquad B^* := \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}$$

$$A^* \bullet B^* \rightarrow -A_0 \cdot B_0 + A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + A_3 \cdot B_3 \qquad (1.5.2)$$

なお，反変成分を共変成分と区別するためには，添字はすべて上付きとすべきであるが，配列要素による表示では下付きとなっていることをことわっておく。

また，微分演算子∂を

$$\partial_* := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_0} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

と定義すれば，

$$\partial_* \bullet A^* \rightarrow \frac{-\partial}{\partial x_0} \cdot A_0 + \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot A_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot A_3$$

$$\partial_* \cdot \phi \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_0} \cdot \phi & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \cdot \phi & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \cdot \phi & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \cdot \phi \end{pmatrix}$$

$$\Box \phi = \quad \partial_* \bullet (\partial_* \cdot \phi) \rightarrow \frac{-\partial^2}{\partial x_0^{\,2}} \cdot \phi + \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} \cdot \phi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}} \cdot \phi + \frac{\partial^2}{\partial x_3^{\,2}} \cdot \phi \qquad (1.5.3)$$

□は，D'Alembertの演算子で，Laplace演算子△をMinkowski時空に拡張したものにあたる。

1.6　電磁場の変換

$\mathbf{E_1} := 1 \quad \mathbf{E_2} := 1 \quad \mathbf{E_3} := 1$

$\mathbf{H_1} := 1 \quad \mathbf{H_2} := 1 \quad \mathbf{H_3} := 1$

$\mathbf{E_1} := \mathbf{E_1} \quad \mathbf{E_2} := \mathbf{E_2} \quad \mathbf{E_3} := \mathbf{E_3}$

$\mathbf{H_1} := \mathbf{H_1} \quad \mathbf{H_2} := \mathbf{H_2} \quad \mathbf{H_3} := \mathbf{H_3}$

$\mathbf{c} := 1 \quad \mathbf{c} := \mathbf{c} \quad \rho := 1 \quad \rho := \rho$

$\mathbf{j_1} := 1 \quad \mathbf{j_2} := 1 \quad \mathbf{j_3} := 1$

$\mathbf{j_1} := \mathbf{j_1} \quad \mathbf{j_2} := \mathbf{j_2} \quad \mathbf{j_3} := \mathbf{j_3}$

（シンボル未定義による不都合をなくすため）

電磁場テンソルおよび4-電流密度は，次の様に定義される。

$$\mathbf{F^{**}} := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E_1} & \mathbf{E_2} & \mathbf{E_3} \\ -\mathbf{E_1} & 0 & \mathbf{H_3} & -\mathbf{H_2} \\ -\mathbf{E_2} & -\mathbf{H_3} & 0 & \mathbf{H_1} \\ -\mathbf{E_3} & \mathbf{H_2} & -\mathbf{H_1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j^*} := \begin{pmatrix} \mathbf{c}\cdot\rho & \mathbf{j_1} & \mathbf{j_2} & \mathbf{j_3} \end{pmatrix} \qquad (1.6.1)$$

４階の完全反対称基本擬テンソルを　$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\varepsilon^{0123} = 1\right)$　で表せば，２階反対称テンソル $\mathbf{T}$ に対して dualなテンソルは，$\mathbf{T}^{\circ\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot\mathbf{T}_{\gamma\delta}$ で定義される。$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ は，Mathcad においては３次元の $\varepsilon(\alpha,\beta,\gamma)$ によってつくることができるが，シンボリック計算になじまないため，dualなテンソルをつくる関数を次のように定義して用いることにする。

$$\varepsilon^{****}(\mathbf{T}) := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{T}_{2,3} - \mathbf{T}_{3,2} & \mathbf{T}_{3,1} - \mathbf{T}_{1,3} & \mathbf{T}_{1,2} - \mathbf{T}_{2,1} \\ \mathbf{T}_{3,2} - \mathbf{T}_{2,3} & 0 & \mathbf{T}_{0,3} - \mathbf{T}_{3,0} & \mathbf{T}_{2,0} - \mathbf{T}_{0,2} \\ \mathbf{T}_{1,3} - \mathbf{T}_{3,1} & \mathbf{T}_{3,0} - \mathbf{T}_{0,3} & 0 & \mathbf{T}_{0,1} - \mathbf{T}_{1,0} \\ \mathbf{T}_{2,1} - \mathbf{T}_{1,2} & \mathbf{T}_{0,2} - \mathbf{T}_{2,0} & \mathbf{T}_{1,0} - \mathbf{T}_{0,1} & 0 \end{pmatrix}$$

これによれば，電磁場テンソル $\mathbf{F}$ にdualなテンソル $\mathbf{F}^\circ$ を次のようにつくることができる。

$$\mathbf{F}^{\circ\alpha\beta} = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot\mathbf{F}_{\gamma\delta}$$

すなわち，

$$\mathbf{F}^{\circ**} := \frac{1}{2}\cdot\varepsilon^{****}\left(\mathbf{g_{**}}\cdot\mathbf{F^{**}}\cdot\mathbf{g_{**}}\right) \qquad \mathbf{F}^{\circ**} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{H_1} & \mathbf{H_2} & \mathbf{H_3} \\ -\mathbf{H_1} & 0 & -\mathbf{E_3} & \mathbf{E_2} \\ -\mathbf{H_2} & \mathbf{E_3} & 0 & -\mathbf{E_1} \\ -\mathbf{H_3} & -\mathbf{E_2} & \mathbf{E_1} & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.6.2)$$

マックスウェル方程式は，これを用いて

$$\partial_\beta\,\mathbf{F}^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{j}^\alpha \qquad \partial_\beta\,\mathbf{F}^{\circ\alpha\beta} = 0 \qquad \left(\ \partial_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^\beta}\ \right) \qquad (1.6.3)$$

と表されるが，実際，　$\partial\mathbf{F}(\alpha) := \partial_*\cdot\left(\mathbf{F^{**}}^{\mathrm{T}}\right)^{\langle\alpha\rangle}$　$\partial\mathbf{F}^\circ(\alpha) := \partial_*\cdot\left(\mathbf{F}^{\circ**\mathrm{T}}\right)^{\langle\alpha\rangle}$

$$\partial\mathbf{F}(0) = \frac{4\pi}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{j^*}_{0,0} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_1}}\cdot\mathbf{E_1} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_2}}\cdot\mathbf{E_2} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_3}}\cdot\mathbf{E_3} = 4\cdot\pi\cdot\rho \qquad \text{i.e.} \quad \mathbf{divE} = 4\pi\rho$$

$$\partial\mathbf{F}(1) = \frac{4\pi}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{j^*}_{0,1} \rightarrow \frac{-\partial}{\partial\mathbf{x_0}}\cdot\mathbf{E_1} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_2}}\cdot\mathbf{H_3} - \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_3}}\cdot\mathbf{H_2} = 4\cdot\frac{\pi}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{j_1} \qquad \text{,etc. i.e.} \quad \mathbf{rotH} = \frac{1}{\mathbf{c}}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{t}} + \frac{4\pi}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{j}$$

$$\partial\mathbf{F}^\circ(0) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_1}}\cdot\mathbf{H_1} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_2}}\cdot\mathbf{H_2} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_3}}\cdot\mathbf{H_3} = 0 \qquad \text{i.e.} \quad \mathbf{divH} = 0$$

$$\partial\mathbf{F}^\circ(1) = 0 \rightarrow \frac{-\partial}{\partial\mathbf{x_0}}\cdot\mathbf{H_1} - \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_2}}\cdot\mathbf{E_3} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x_3}}\cdot\mathbf{E_2} = 0 \qquad \text{,etc. i.e.} \quad \mathbf{rotE} = -\frac{1}{\mathbf{c}}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{t}}$$

限定されたローレンツ変換により，電磁場の変換を求めると，次の様になる。 $\beta := .1 \quad \beta := \beta$

$$L*_* := \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad F'^{**} := L*_*\cdot F^{**}\cdot L*_*^{T}$$

$$E'_1 = F'^{**}_{0,1} \text{ simplify } \rightarrow E'_1 = E_1 \qquad H'_1 = F'^{**}_{2,3} \rightarrow H'_1 = H_1$$

$$E'_2 = F'^{**}_{0,2} \text{ simplify } \rightarrow E'_2 = \frac{-\left(-E_2 + \beta\cdot H_3\right)}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \qquad H'_2 = F'^{**}_{3,1} \text{ simplify } \rightarrow H'_2 = \frac{\left(\beta\cdot E_3 + H_2\right)}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$E'_3 = F'^{**}_{0,3} \text{ simplify } \rightarrow E'_3 = \frac{\left(E_3 + \beta\cdot H_2\right)}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \qquad H'_3 = F'^{**}_{1,2} \text{ simplify } \rightarrow H'_3 = \frac{-\left(\beta\cdot E_2 - H_3\right)}{\left(1-\beta^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

(1.6.4)

ここで，$\partial' = \partial\cdot\left(L^{-1}\right)^{T}$ $F' = L\cdot F\cdot L^{T}$ および $j' = j\cdot L^{T}$ などから，明らかに

$$\partial'\cdot F' = \frac{4\pi}{c}\cdot j' \qquad \partial'\cdot F^{\circ\prime} = 0 \qquad \left(L^{T} = L \ ,\ \left(L^{-1}\right)^{T} = L^{-1} \right)$$

となり，マックスウェル方程式がローレンツ変換において不変となることがわかる。
一般にテンソル方程式は，その定義から明らかなように自動的にローレンツ不変となる。

２．一般相対性理論

2.1 リーマン幾何学

計量テンソルの対角成分の導関数を，シンボリックにあつかうために，次のように定義する。すなわち，各成分を座標による微分係数の級数として表しておく。

$x^{\circ} := 1 \quad x^1 := 1 \quad x^2 := 1 \quad x^3 := 1$

$x^{\circ} := x^{\circ} \quad x^1 := x^1 \quad x^2 := x^2 \quad x^3 := x^3$

$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x^{\circ} & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$

$K_{\circ} := 1 \quad K_1 := 1 \quad K_2 := 1 \quad K_3 := 1$

$K_{\circ} := K_{\circ} \quad K_1 := K_1 \quad K_2 := K_2 \quad K_3 := K_3$

$K_{\circ\circ} := 1 \quad K_{\circ 1} := 1 \quad K_{\circ 2} := 1 \quad K_{\circ 3} := 1$

$K_{\circ\circ} := K_{\circ\circ} \quad K_{\circ 1} := K_{\circ 1} \quad K_{\circ 2} := K_{\circ 2} \quad K_{\circ 3} := K_{\circ 3}$

$K_{11} := 1 \quad K_{12} := 1 \quad K_{13} := 1$

$K_{11} := K_{11} \quad K_{12} := K_{12} \quad K_{13} := K_{13}$

$K_{22} := 1 \quad K_{23} := 1$

$K_{22} := K_{22} \quad K_{23} := K_{23}$

$K_{33} := 1$

$K_{33} := K_{33}$

これらの意味は，

$K_{\circ} = \dfrac{\partial K}{\partial x^{\circ}}$, $K_{\circ 1} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial x^{\circ} \partial x^1}$ etc.

$K := 1$

$K := K$

$\partial K := \begin{pmatrix} K_{\circ} & K_1 & K_2 & K_3 \end{pmatrix}$

$$\partial^2 K := \begin{pmatrix} K_{\circ\circ} & K_{\circ 1} & K_{\circ 2} & K_{\circ 3} \\ K_{\circ 1} & K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{\circ 2} & K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{\circ 3} & K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{pmatrix} \qquad K := K + \partial K \cdot x^T + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \partial^2 K \cdot x^T$$

$L_{\circ} := 1 \quad L_1 := 1 \quad L_2 := 1 \quad L_3 := 1$

$L_{\circ} := L_{\circ} \quad L_1 := L_1 \quad L_2 := L_2 \quad L_3 := L_3$

$L_{\circ\circ} := 1 \quad L_{\circ 1} := 1 \quad L_{\circ 2} := 1 \quad L_{\circ 3} := 1$

$L_{\circ\circ} := L_{\circ\circ} \quad L_{\circ 1} := L_{\circ 1} \quad L_{\circ 2} := L_{\circ 2} \quad L_{\circ 3} := L_{\circ 3}$

$L_{11} := 1 \quad L_{12} := 1 \quad L_{13} := 1$

$L_{11} := L_{11} \quad L_{12} := L_{12} \quad L_{13} := L_{13}$

$\partial L := \begin{pmatrix} L_{\circ} & L_1 & L_2 & L_3 \end{pmatrix}$

$L := 1 \quad L_{22} := 1 \quad L_{23} := 1$

$L := L \quad L_{22} := L_{22} \quad L_{23} := L_{23}$

$L_{33} := 1$

$L_{33} := L_{33}$

$$\partial^2 L := \begin{pmatrix} L_{\circ\circ} & L_{\circ 1} & L_{\circ 2} & L_{\circ 3} \\ L_{\circ 1} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{\circ 2} & L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{\circ 3} & L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{pmatrix} \qquad L := L + \partial L \cdot x^T + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \partial^2 L \cdot x^T$$

$M_{\circ} := 1 \quad M_1 := 1 \quad M_2 := 1 \quad M_3 := 1$

$M_{\circ} := M_{\circ} \quad M_1 := M_1 \quad M_2 := M_2 \quad M_3 := M_3$

$M_{\circ\circ} := 1 \quad M_{\circ 1} := 1 \quad M_{\circ 2} := 1 \quad M_{\circ 3} := 1$

$M_{\circ\circ} := M_{\circ\circ} \quad M_{\circ 1} := M_{\circ 1} \quad M_{\circ 2} := M_{\circ 2} \quad M_{\circ 3} := M_{\circ 3}$

$M_{11} := 1 \quad M_{12} := 1 \quad M_{13} := 1$

$M_{11} := M_{11} \quad M_{12} := M_{12} \quad M_{13} := M_{13}$

$\partial M := \begin{pmatrix} M_{\circ} & M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix}$

$M := 1 \quad M_{22} := 1 \quad M_{23} := 1$

$M := M \quad M_{22} := M_{22} \quad M_{23} := M_{23}$

$M_{33} := 1$

$M_{33} := M_{33}$

$$\partial^2 M := \begin{pmatrix} M_{\circ\circ} & M_{\circ 1} & M_{\circ 2} & M_{\circ 3} \\ M_{\circ 1} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{\circ 2} & M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{\circ 3} & M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} \qquad M := M + \partial M \cdot x^T + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \partial^2 M \cdot x^T$$

$$N_{\circ} := 1 \quad N_1 := 1 \quad N_2 := 1 \quad N_3 := 1$$
$$N_{\circ} := N_{\circ} \quad N_1 := N_1 \quad N_2 := N_2 \quad N_3 := N_3$$

$$N_{\circ\circ} := 1 \quad N_{\circ 1} := 1 \quad N_{\circ 2} := 1 \quad N_{\circ 3} := 1$$
$$N_{\circ\circ} := N_{\circ\circ} \quad N_{\circ 1} := N_{\circ 1} \quad N_{\circ 2} := N_{\circ 2} \quad N_{\circ 3} := N_{\circ 3}$$
$$N_{11} := 1 \quad N_{12} := 1 \quad N_{13} := 1$$
$$N_{11} := N_{11} \quad N_{12} := N_{12} \quad N_{13} := N_{13}$$
$$N := 1 \quad N_{22} := 1 \quad N_{23} := 1$$
$$N := N \quad N_{22} := N_{22} \quad N_{23} := N_{23}$$
$$N_{33} := 1$$
$$N_{33} := N_{33}$$

$$\partial N := \begin{pmatrix} N_{\circ} & N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 N := \begin{pmatrix} N_{\circ\circ} & N_{\circ 1} & N_{\circ 2} & N_{\circ 3} \\ N_{\circ 1} & N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{\circ 2} & N_{12} & N_{22} & N_{23} \\ N_{\circ 3} & N_{13} & N_{23} & N_{33} \end{pmatrix} \qquad N := N + \partial N \cdot x^{T} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \partial^2 N \cdot x^{T}$$

(2.1.1)

以下は，座標による微分演算子と，級数から導関数をとりだすための関数である。

$$\partial(T, \alpha) := \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x^{\circ}} T \quad \text{if} \quad \alpha = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^{1}} T \quad \text{if} \quad \alpha = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x^{2}} T \quad \text{if} \quad \alpha = 2 \\ \frac{\partial}{\partial x^{3}} T \quad \text{if} \quad \alpha = 3 \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \qquad \text{¸}(T, x^{\circ}, x^1, x^2, x^3) := \lim_{x^{\circ} \to 0} \lim_{x^1 \to 0} \lim_{x^2 \to 0} \lim_{x^3 \to 0} T$$

等方な４次元リーマン空間の計量テンソルは，適当な変換によって次のように，対角成分のみの行列によって表される。

$$g_{**}(K, L, M, N) := \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \qquad g^{**}(K, L, M, N) := g_{**}(K, L, M, N)^{-1}$$

(2.1.2)

次に，いわゆるクリストッフェルシンボルを計量テンソルの微分によって求める。

$$\Gamma_{***}(\mu, \nu, \lambda) := \frac{1}{2} \cdot \left[\partial\left[\left(g_{**}(K, L, M, N) \right)_{\mu, \nu}, \lambda \right] + \partial\left[\left(g_{**}(K, L, M, N) \right)_{\mu, \lambda}, \nu \right] - \partial\left[\left(g_{**}(K, L, M, N) \right)_{\nu, \lambda}, \mu \right] \right]$$

$$\Gamma^{*}{}_{**}(\mu, \nu, \lambda) := \text{¸}\left[\left(g^{**}(K, L, M, N) \right)_{\mu, \mu} \cdot \Gamma_{***}(\mu, \nu, \lambda), x^{\circ}, x^1, x^2, x^3 \right]$$

(2.1.3)

$$\Gamma^{*}{}_{**}(0,0,0) \to \frac{1}{2} \cdot \frac{K_{\circ}}{K} \qquad \Gamma^{*}{}_{**}(0,0,1) \to \frac{1}{2} \cdot \frac{K_1}{K} \qquad \Gamma^{*}{}_{**}(0,0,2) \to \frac{1}{2} \cdot \frac{K_2}{K} \qquad \Gamma^{*}{}_{**}(0,0,3) \to \frac{1}{2} \cdot \frac{K_3}{K}$$

$$\Gamma^{*}{}_{**}(0,1,1) \to \frac{-1}{2} \cdot \frac{L_{\circ}}{K} \qquad \Gamma^{*}{}_{**}(0,1,2) \to 0 \qquad \Gamma^{*}{}_{**}(0,1,3) \to 0$$

$$\Gamma^{*}{}_{**}(0,2,2) \to \frac{-1}{2} \cdot \frac{M_{\circ}}{K} \qquad \Gamma^{*}{}_{**}(0,2,3) \to 0$$

$$\Gamma^{*}{}_{**}(0,3,3) \to \frac{-1}{2} \cdot \frac{N_{\circ}}{K}$$

$\Gamma^*_{**}(1,0,0) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{K_1}{L}$ $\Gamma^*_{**}(1,0,1) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{L_{\circ}}{L}$ $\Gamma^*_{**}(1,0,2) \rightarrow 0$ $\Gamma^*_{**}(1,0,3) \rightarrow 0$

$\Gamma^*_{**}(1,1,1) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{L_1}{L}$ $\Gamma^*_{**}(1,1,2) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{L_2}{L}$ $\Gamma^*_{**}(1,1,3) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{L_3}{L}$

$\Gamma^*_{**}(1,2,2) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{M_1}{L}$ $\Gamma^*_{**}(1,2,3) \rightarrow 0$

$\Gamma^*_{**}(1,3,3) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{N_1}{L}$

$\Gamma^*_{**}(2,0,1) \rightarrow 0$ $\Gamma^*_{**}(2,0,0) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{K_2}{M}$ $\Gamma^*_{**}(2,0,2) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{M_{\circ}}{M}$ $\Gamma^*_{**}(2,0,3) \rightarrow 0$

$\Gamma^*_{**}(2,1,1) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{L_2}{M}$ $\Gamma^*_{**}(2,1,2) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{M_1}{M}$ $\Gamma^*_{**}(2,1,3) \rightarrow 0$

$\Gamma^*_{**}(2,2,2) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{M_2}{M}$ $\Gamma^*_{**}(2,2,3) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{M_3}{M}$

$\Gamma^*_{**}(2,3,3) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{N_2}{M}$

$\Gamma^*_{**}(3,0,0) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{K_3}{N}$ $\Gamma^*_{**}(3,0,1) \rightarrow 0$ $\Gamma^*_{**}(3,0,2) \rightarrow 0$ $\Gamma^*_{**}(3,0,3) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{N_{\circ}}{N}$

$\Gamma^*_{**}(3,1,1) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{L_3}{N}$ $\Gamma^*_{**}(3,1,2) \rightarrow 0$ $\Gamma^*_{**}(3,1,3) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{N_1}{N}$

$\Gamma^*_{**}(3,2,2) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{M_3}{N}$ $\Gamma^*_{**}(3,2,3) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{N_2}{N}$

$\Gamma^*_{**}(3,3,3) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{N_3}{N}$

これらを用いて，曲率テンソルを計算する。

$$\Gamma^*_{**}(\mu,\nu,\lambda) := g^{**}(K,L,M,N)_{\mu,\mu}\cdot\Gamma_{***}(\mu,\nu,\lambda)$$

$$\Gamma\alpha_{\mu\alpha\nu}(\mu,\nu) := \text{¸}\left(\partial\left(\Gamma^*_{**}(0,\mu,0),\nu\right),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) + \text{¸}\left(\partial\left(\Gamma^*_{**}(1,\mu,1),\nu\right),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) \ldots \\ + \text{¸}\left(\partial\left(\Gamma^*_{**}(2,\mu,2),\nu\right),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) + \text{¸}\left(\partial\left(\Gamma^*_{**}(3,\mu,3),\nu\right),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right)$$

$$\Gamma\alpha_{\mu\nu\alpha}(\mu,\nu) := \text{¸}\left(\partial\left(\Gamma^*_{**}(0,\mu,\nu),0\right),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) + \text{¸}\left(\partial\left(\Gamma^*_{**}(1,\mu,\nu),1\right),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) \ldots \\ + \text{¸}\left(\partial\left(\Gamma^*_{**}(2,\mu,\nu),2\right),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) + \text{¸}\left(\partial\left(\Gamma^*_{**}(3,\mu,\nu),3\right),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right)$$

$$\Gamma\Gamma_1(\mu,\nu,\alpha) := \text{¸}\left(\Gamma^*_{**}(0,\mu,\alpha)\cdot\Gamma^*_{**}(\alpha,0,\nu),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) + \text{¸}\left(\Gamma^*_{**}(1,\mu,\alpha)\cdot\Gamma^*_{**}(\alpha,1,\nu),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) \ldots \\ + \text{¸}\left(\Gamma^*_{**}(2,\mu,\alpha)\cdot\Gamma^*_{**}(\alpha,2,\nu),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) + \text{¸}\left(\Gamma^*_{**}(3,\mu,\alpha)\cdot\Gamma^*_{**}(\alpha,3,\nu),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right)$$

$$\Gamma\lambda\mu\alpha\Gamma\alpha_{\lambda\nu}(\mu,\nu) := \Gamma\Gamma_1(\mu,\nu,0) + \Gamma\Gamma_1(\mu,\nu,1) + \Gamma\Gamma_1(\mu,\nu,2) + \Gamma\Gamma_1(\mu,\nu,3)$$

$$\Gamma\Gamma_2(\mu,\nu,\alpha) := \text{¸}\left(\Gamma^*_{**}(0,\mu,\nu)\cdot\Gamma^*_{**}(\alpha,0,\alpha),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) + \text{¸}\left(\Gamma^*_{**}(1,\mu,\nu)\cdot\Gamma^*_{**}(\alpha,1,\alpha),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) \ldots \\ + \text{¸}\left(\Gamma^*_{**}(2,\mu,\nu)\cdot\Gamma^*_{**}(\alpha,2,\alpha),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right) + \text{¸}\left(\Gamma^*_{**}(3,\mu,\nu)\cdot\Gamma^*_{**}(\alpha,3,\alpha),x^{\circ},x^1,x^2,x^3\right)$$

$$\Gamma\lambda\mu\nu\Gamma\alpha_{\lambda\alpha}(\mu,\nu) := \Gamma\Gamma_2(\mu,\nu,0) + \Gamma\Gamma_2(\mu,\nu,1) + \Gamma\Gamma_2(\mu,\nu,2) + \Gamma\Gamma_2(\mu,\nu,3)$$

いわゆるRicciテンソルが次式により導かれる。

$$R_{**}(\mu,\nu) := \Gamma\alpha_{\mu\alpha\nu}(\mu,\nu) - \Gamma\alpha_{\mu\nu\alpha}(\mu,\nu) + \Gamma\lambda\mu\alpha\Gamma\alpha_{\lambda\nu}(\mu,\nu) - \Gamma\lambda\mu\nu\Gamma\alpha_{\lambda\alpha}(\mu,\nu) \tag{2.1.4}$$

$R_{**}(0\,,0) \rightarrow$ （省略）

整理すると，

$$R_{\circ\circ} = \frac{1}{2}\left[\left[\frac{(K_{11} + L_{\circ\circ})}{L} + \frac{(K_{22} + M_{\circ\circ})}{M} + \frac{(K_{33} + N_{\circ\circ})}{N}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{(K_1{}^2 + K_\circ \cdot L_\circ)}{(L\cdot K)} + \frac{(K_2{}^2 + K_\circ \cdot M_\circ)}{(M\cdot K)} + \frac{(K_3{}^2 + K_\circ \cdot N_\circ)}{(N\cdot K)}\right]\right] \ldots$$
$$+ \frac{-1}{4}\left[\frac{(L_\circ{}^2 + K_1\cdot L_1)}{L^2} + \frac{(M_\circ{}^2 + K_2\cdot M_2)}{M^2} + \frac{(N_\circ{}^2 + K_3\cdot N_3)}{N^2}\right] \ldots$$
$$+ \frac{1}{4}\left[\frac{(K_2\cdot N_2 + K_3\cdot M_3)}{(N\cdot M)} + \frac{(K_3\cdot L_3 + K_1\cdot N_1)}{(L\cdot N)} + \frac{(K_1\cdot M_1 + K_2\cdot L_2)}{(M\cdot L)}\right]$$

同様にして，

$R_{**}(0\,,1) \rightarrow$ （省略）

$$R_{\circ 1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{M_{\circ 1}}{M} + \frac{N_{\circ 1}}{N}\right) - \frac{1}{4}\left[K_1\cdot\frac{M_\circ}{(K\cdot M)} + K_1\cdot\frac{N_\circ}{(K\cdot N)} + L_\circ\cdot\frac{M_1}{(L\cdot M)} + L_\circ\cdot\frac{N_1}{(L\cdot N)} + M_\circ\cdot\frac{M_1}{M^2} + N_\circ\cdot\frac{N_1}{N^2}\right]$$

他の要素は KLMN,0123 を順送りに置換したものになる。

Ricciテンソルの添え字を一つあげると，

$$R^*{}_*(\mu\,,\nu) := {}_{,}\left(g^{**}(K\,,L\,,M\,,N)_{\mu\,,\mu}\cdot R_{**}(\mu\,,\nu)\,,x^\circ\,,x^1\,,x^2\,,x^3\right) \qquad (2.1.5)$$

$R^*{}_*(0\,,0) \rightarrow$

$R^*{}_*(1\,,1) \rightarrow$

$R^*{}_*(2\,,2) \rightarrow$ （これらを下の $R^\circ{}_\circ$ などにコピーする）

$R^*{}_*(3\,,3) \rightarrow$

$R^*{}_*(0\,,1) \rightarrow$

$K := K \quad L := L \quad M := M \quad N := N$

$R^\circ{}_\circ :=$

$R^1{}_1 :=$

$R^2{}_2 :=$

$R^3{}_3 :=$

$R^\circ{}_1 :=$

スカラー曲率は，Ricciテンソルを縮約して，以下の様になる。

$$R := R^{\circ}{}_{\circ} + R^{1}{}_{1} + R^{2}{}_{2} + R^{3}{}_{3} \qquad (2.1.6)$$

$R\ \text{simplify}\ \rightarrow$ ■ （省略）

整理すると，

$$R = \frac{\frac{1}{L}\cdot L_{\circ\circ} + \frac{1}{M}\cdot M_{\circ\circ} + \frac{1}{N}\cdot N_{\circ\circ}}{K} + \frac{\frac{1}{K}\cdot K_{11} + \frac{1}{M}\cdot M_{11} + \frac{1}{N}\cdot N_{11}}{L} + \frac{\frac{1}{K}\cdot K_{22} + \frac{1}{L}\cdot L_{22} + \frac{1}{N}\cdot N_{22}}{M} + \frac{\frac{1}{K}\cdot K_{33} + \frac{1}{L}\cdot L_{33} + \frac{1}{M}\cdot M_{33}}{N} \ldots$$
$$+ \frac{-1}{2}\left(\frac{L_\circ\cdot K_\circ + K_1^{\,2}}{L\cdot K^2} + \frac{M_\circ\cdot K_\circ + K_2^{\,2}}{M\cdot K^2} + \frac{K_3^{\,2} + N_\circ\cdot K_\circ}{N\cdot K^2} + \frac{L_\circ^{\,2} + K_1\cdot L_1}{L^2\cdot K} + \frac{L_2^{\,2} + M_1\cdot L_1}{M\cdot L^2} + \frac{L_3^{\,2} + N_1\cdot L_1}{N\cdot L^2} \ldots + \frac{M_\circ^{\,2} + K_2\cdot M_2}{M^2\cdot K} + \frac{M_1^{\,2} + L_2\cdot M_2}{L\cdot M^2} + \frac{M_3^{\,2} + N_2\cdot M_2}{N\cdot M^2} + \frac{N_\circ^{\,2} + K_3\cdot N_3}{N^2\cdot K} + \frac{N_1^{\,2} + N_3\cdot L_3}{N^2\cdot L} + \frac{N_2^{\,2} + M_3\cdot N_3}{M\cdot N^2}\right) \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{L_3\cdot M_3 + N_1\cdot M_1 + N_2\cdot L_2}{N\cdot L\cdot M} + \frac{M_\circ\cdot N_\circ + N_2\cdot K_2 + K_3\cdot M_3}{M\cdot N\cdot K} \ldots + \frac{K_1\cdot N_1 + K_3\cdot L_3 + L_\circ\cdot N_\circ}{N\cdot L\cdot K} + \frac{K_2\cdot L_2 + M_\circ\cdot L_\circ + M_1\cdot K_1}{M\cdot L\cdot K}\right)$$

結局，アインシュタイン方程式は，以下のような形をとることになる。

$\Lambda := 1$

$\Lambda := \Lambda$

$$G_\mu{}^\nu = R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}\cdot\delta_\mu{}^\nu\left(R + 2\Lambda\right) \qquad (2.1.7)$$

$$G^{\circ}{}_{\circ} := R^{\circ}{}_{\circ} - \frac{1}{2}\cdot\left(R + 2\Lambda\right)$$

$G^{\circ}{}_{\circ}\ \text{simplify}\ \rightarrow$ ■ （省略）

整理して，

$$G^{\circ}{}_{\circ} = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(M_{11} + L_{22})}{(L\cdot M)} + \frac{(N_{11} + L_{33})}{(L\cdot N)} + \frac{(M_{33} + N_{22})}{(M\cdot N)}\right] \ldots$$
$$+ \frac{1}{4}\cdot\left[\left[\frac{(L_1\cdot M_1 + L_2^{\,2})}{(M\cdot L^2)} + \frac{(L_3^{\,2} + L_1\cdot N_1)}{(N\cdot L^2)} + \frac{(M_1^{\,2} + L_2\cdot M_2)}{(L\cdot M^2)}\right] \ldots + \frac{(M_2\cdot N_2 + M_3^{\,2})}{(N\cdot M^2)} + \frac{(N_1^{\,2} + N_3\cdot L_3)}{(L\cdot N^2)} + \frac{(N_2^{\,2} + M_3\cdot N_3)}{(M\cdot N^2)}\right] \ldots$$
$$+ \frac{-1}{4}\cdot\left[\frac{(L_2\cdot N_2 + N_1\cdot M_1 + M_3\cdot L_3)}{[N\cdot(M\cdot L)]} + \frac{1}{(N\cdot M\cdot L)}\cdot\frac{(M_\circ\cdot N_\circ\cdot L + L_\circ\cdot M_\circ\cdot N + L_\circ\cdot N_\circ\cdot M)}{K}\right] - \Lambda$$

同様にして，

$$G^{\circ}{}_{1} := R^{\circ}{}_{1}$$

$$K\cdot G^{\circ}{}_{1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{N}\cdot N_{\circ 1} + \frac{1}{M}\cdot M_{\circ 1}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left[\left[\frac{M_1}{(M\cdot L)}\cdot L_\circ + \frac{N_1}{(N\cdot L)}\cdot L_\circ + \frac{K_1}{(M\cdot K)}\cdot M_\circ + \frac{K_1}{(N\cdot K)}\cdot N_\circ\right] \ldots + \frac{M_1}{M^2}\cdot M_\circ + \frac{N_1}{N^2}\cdot N_\circ\right]$$

これらの式は，ディングルの公式と呼ばれる。

2.2 シュワルツシルト時空

$r := 1 \quad \theta := 1$

球対称な時空の計量を求める。簡単のため，宇宙定数は無視する。 $\Lambda := 0$ $\quad r := r \quad \theta := \theta$

極座標を用いると，計量テンソルの対角成分とその座標微分は次のようになる。

$$K := K \quad L := L \quad M := r^2 \quad N := r^2\cdot\sin(\theta)^2$$

$$K_0 := 0 \quad L_0 := 0 \quad M_0 := 0 \quad N_0 := 0$$

$$K_1 := K_1 \quad L_1 := L_1 \quad M_1 := \frac{d}{dr}r^2 \quad N_1 := \frac{d}{dr}r^2\cdot\sin(\theta)^2$$

$$K_2 := 0 \quad L_2 := 0 \quad M_2 := 0 \quad N_2 := \frac{d}{d\theta}r^2\cdot\sin(\theta)^2$$

$$K_3 := 0 \quad L_3 := 0 \quad M_3 := 0 \quad N_3 := 0$$

$$K_{00} := 0 \quad L_{00} := 0 \quad M_{00} := 0 \quad N_{00} := 0$$

$$K_{11} := K_{11} \quad L_{11} := L_{11} \quad M_{11} := \frac{d^2}{dr^2}r^2 \quad N_{11} := \frac{d^2}{dr^2}r^2\cdot\sin(\theta)^2$$

$$K_{22} := 0 \quad L_{22} := 0 \quad M_{22} := 0 \quad N_{22} := \frac{d^2}{d\theta^2}r^2\cdot\sin(\theta)^2$$

$$K_{33} := 0 \quad L_{33} := 0 \quad M_{33} := 0 \quad N_{33} := 0 \qquad \text{etc.} \qquad (2.2.1)$$

ディングルの公式に代入して，アインシュタインテンソルを求める。
(0,0)成分は，

$$G^{\circ}{}_{0} := -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(M_{11}+L_{22})}{(L\cdot M)}+\frac{(N_{11}+L_{33})}{(L\cdot N)}+\frac{(M_{33}+N_{22})}{(M\cdot N)}\right]\ldots$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\left[\left[\frac{(L_1\cdot M_1+L_2{}^2)}{(M\cdot L^2)}+\frac{(L_3{}^2+L_1\cdot N_1)}{(N\cdot L^2)}+\frac{(M_1{}^2+L_2\cdot M_2)}{(L\cdot M^2)}\right]\ldots + \frac{(M_2\cdot N_2+M_3{}^2)}{(N\cdot M^2)}+\frac{(N_1{}^2+N_3\cdot L_3)}{(L\cdot N^2)}+\frac{(N_2{}^2+M_3\cdot N_3)}{(M\cdot N^2)}\right]\ldots$$
$$+\frac{-1}{4}\cdot\left[\frac{(L_2\cdot N_2+N_1\cdot M_1+M_3\cdot L_3)}{[N\cdot(M\cdot L)]}+\frac{1}{(N\cdot M\cdot L)}\cdot\frac{(M_0\cdot N_0\cdot L+L_0\cdot M_0\cdot N+L_0\cdot N_0\cdot M)}{K}\right]-\Lambda$$

$$G^{\circ}{}_{0}\ \text{simplify} \ \rightarrow \frac{1}{r^2}\cdot\frac{(L^2+L_1\cdot r-L)}{L^2}$$

真空解においては，右辺は０となる。

$$\frac{(L_1\cdot r+L^2-L)}{(r^2\cdot L^2)} = 0 \qquad \frac{L_1}{L(1-L)} = \frac{1}{r}$$

積分してLを求める。 $\displaystyle\int \frac{1}{L\cdot(1-L)}\,dL = \int \frac{1}{r}\,dr \rightarrow \ln(L)-\ln(-1+L) = \ln(r)$

$m := 1 \quad m := m$

積分定数を考慮して，

$$\ln(L)-\ln(-1+L) = \ln(r)-\ln(2m) \qquad \frac{L}{L-1} = \frac{r}{2m}$$

したがって，

$$L = \frac{1}{\left(1-\frac{2\cdot m}{r}\right)} \qquad (2.2.2)$$

(1,1)成分を同様にして求めると，

$$G^1{}_1 := R^1{}_1 - \frac{1}{2}\cdot R$$

$G^1{}_1$ simplify $\rightarrow$ ▪　　（下にコピー）

$G^1{}_1 :=$ ▪

（省略）

$G^1{}_1$ simplify $\rightarrow$ ▪

$$G^1{}_1 = \frac{-\left(-L\cdot K + K + r\cdot K_1\right)}{\left[r^2\cdot(K\cdot L)\right]}$$

アインシュタイン方程式により，　$-L\cdot K + K + r\cdot K_1 = 0$　　$L := \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{2\cdot m}{r}\right)}$

$$\left[\frac{K_1}{K} = \frac{(-1 + L)}{r}\right] \text{simplify} \rightarrow \frac{K_1}{K} = 2\cdot\frac{m}{[(r - 2\cdot m)\cdot r]}$$

積分すると，

$$\int \frac{1}{K}\, dK = \int 2\cdot\frac{m}{[(r - 2\cdot m)\cdot r]}\, dr \rightarrow \ln(K) = \ln(-r + 2\cdot m) - \ln(r)$$

$\alpha := 1$

$\alpha := \alpha$

積分定数を考慮して，

$$K := \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\cdot\alpha$$

α は一般に x^0 の関数であるが，時空では　$g = K\cdot L\cdot M\cdot N < 0$　であるから　$\alpha < 0$　となる。
x^0 の単位を選んで $\alpha = -1$　とすることができるから，

$$-K = L^{-1} = 1 - \frac{2m}{r} \qquad (2.2.3)$$

結局，真空で球対称性のある時空の計量は，以下のようになる。

$$g_{**} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\cdot\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} ct & r & \theta & \varphi \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2 \qquad (2.2.4)$$

これをシュワルツシルトの時空とよぶ。

2.3 球対称重力場の性質

$m := 1 \quad ct := 1 \quad r := 1 \quad \theta := 1 \quad \varphi := 1$

$m := m \quad ct := ct \quad r := r \quad \theta := \theta \quad \varphi := \varphi$

Schwarzschild 時空における質点の運動を，測地線方程式（運動方程式）を解いて考察してみる。

$x := \begin{pmatrix} ct & r & \theta & \varphi \end{pmatrix}$

$$g_{**} := \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\cdot\sin(\theta)^2 \end{bmatrix} \qquad g^{**} := \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{2m}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\cdot\sin(\theta)^{-2} \end{bmatrix}$$

(2.3.1)

$$\partial(T,\alpha) := \begin{cases} \left(\frac{d}{dct}T\right) & \text{if } \alpha = 0 \\ \left(\frac{d}{dr}T\right) & \text{if } \alpha = 1 \\ \left(\frac{d}{d\theta}T\right) & \text{if } \alpha = 2 \\ \left(\frac{d}{d\varphi}T\right) & \text{if } \alpha = 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Gamma_{***}(\mu,\nu,\lambda) := \frac{1}{2}\cdot\left[\partial\left[(g_{**})_{\mu,\nu},\lambda\right] + \partial\left[(g_{**})_{\mu,\lambda},\nu\right] - \partial\left[(g_{**})_{\nu,\lambda},\mu\right]\right]$$

$$\Gamma^*{}_{**}(\mu,\nu,\lambda) := g^{**}{}_{\mu,\mu}\cdot\Gamma_{***}(\mu,\nu,\lambda)$$

$$\Gamma^*{}_{**}(0,0,1) \to \frac{1}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2} \qquad \Gamma^*{}_{**}(1,0,0) \to \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot\frac{m}{r^2} \qquad \Gamma^*{}_{**}(1,1,1) \to \frac{-1}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2}$$

$$\Gamma^*{}_{**}(1,2,2) \to -\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot r \qquad \Gamma^*{}_{**}(1,3,3) \to -\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot r\cdot\sin(\theta)^2 \qquad \Gamma^*{}_{**}(2,3,3) \to -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)$$

$$\Gamma^*{}_{**}(2,1,2) \to \frac{1}{r} \qquad \Gamma^*{}_{**}(3,1,3) \to \frac{1}{r} \qquad \Gamma^*{}_{**}(3,2,3) \to \frac{1}{\sin(\theta)}\cdot\cos(\theta)$$

(2.3.2)

$c := 1 \quad dt/d\tau := 1 \quad dr/d\tau := 1 \quad d\theta/d\tau := 1 \quad d\varphi/d\tau := 1$

$c := c \quad dt/d\tau := dt/d\tau \quad dr/d\tau := dr/d\tau \quad d\theta/d\tau := d\theta/d\tau \quad d\varphi/d\tau := d\varphi/d\tau$

$d^2t/d\tau^2 := 1 \quad d^2r/d\tau^2 := 1 \quad d^2\theta/d\tau^2 := 1 \quad d^2\varphi/d\tau^2 := 1$

$d^2t/d\tau^2 := d^2t/d\tau^2 \quad d^2r/d\tau^2 := d^2r/d\tau^2 \quad d^2\theta/d\tau^2 := d^2\theta/d\tau^2 \quad d^2\varphi/d\tau^2 := d^2\varphi/d\tau^2$

$dx/d\tau := \begin{pmatrix} c\cdot dt/d\tau & dr/d\tau & d\theta/d\tau & d\varphi/d\tau \end{pmatrix}$

$d^2x/d\tau^2 := \begin{pmatrix} c\cdot d^2t/d\tau^2 & d^2r/d\tau^2 & d^2\theta/d\tau^2 & d^2\varphi/d\tau^2 \end{pmatrix}$

$$\Gamma\nu\,dx\nu(\alpha,\mu) := \Gamma^*{}_{**}(\alpha,\mu,0)\cdot (dx/d\tau)_{0,0} + \Gamma^*{}_{**}(\alpha,\mu,1)\cdot (dx/d\tau)_{0,1} + \Gamma^*{}_{**}(\alpha,\mu,2)\cdot (dx/d\tau)_{0,2} + \Gamma^*{}_{**}(\alpha,\mu,3)\cdot (dx/d\tau)_{0,3}$$

$$\Gamma\alpha\mu\nu\cdot dx\mu\cdot dx\nu(\alpha) := \Gamma\nu\,dx\nu(\alpha,0)\cdot (dx/d\tau)_{0,0} + \Gamma\nu\,dx\nu(\alpha,1)\cdot (dx/d\tau)_{0,1} + \Gamma\nu\,dx\nu(\alpha,2)\cdot (dx/d\tau)_{0,2} + \Gamma\nu\,dx\nu(\alpha,3)\cdot (dx/d\tau)_{0,3}$$

以上により，測地線方程式は次のようになる。

$$f(\alpha) := d^2x/d\tau^2{}_{0,\alpha} + \Gamma\alpha\mu\nu\cdot dx\mu\cdot dx\nu(\alpha) = 0 \qquad (2.3.3)$$

すなわち，

$$f(0) \rightarrow c\cdot d^2t/d\tau^2 + \frac{2}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2}\cdot c\cdot dt/d\tau\cdot dr/d\tau = 0$$

$$f(1) \rightarrow d^2r/d\tau^2 + \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot\frac{m}{r^2}\cdot c^2\cdot dt/d\tau^2 - \frac{1}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2}\cdot dr/d\tau^2 - \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot r\cdot d\theta/d\tau^2 - \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot r\cdot\sin(\theta)^2\cdot d\varphi/d\tau^2 = 0$$

$$f(2) \rightarrow d^2\theta/d\tau^2 + \frac{2}{r}\cdot dr/d\tau\cdot d\theta/d\tau - \sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\cdot d\varphi/d\tau^2 = 0$$

$$f(3)\ \mathrm{expand} \rightarrow d^2\varphi/d\tau^2 + \frac{2}{r}\cdot d\varphi/d\tau\cdot dr/d\tau + \frac{2}{\sin(\theta)}\cdot\cos(\theta)\cdot d\varphi/d\tau\cdot d\theta/d\tau = 0 \qquad (2.3.4)$$

θ の初期条件が，次のようになるように座標系を選ぶことができる。

$$\theta := \frac{\pi}{2} \qquad d\theta/d\tau := 0$$

f(2)からこの条件は運動の過程で不変であることがわかる。すると，f(1)およびf(3)は，

$$f_1 := d^2r/d\tau^2 + \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot\frac{m}{r^2}\cdot c^2\cdot dt/d\tau^2 - \frac{1}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2}\cdot dr/d\tau^2 - \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot r\cdot d\theta/d\tau^2 - \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot r\cdot\sin(\theta)^2\cdot d\varphi/d\tau^2 = 0$$

$$f_3 := d^2\varphi/d\tau^2 + \frac{2}{r}\cdot d\varphi/d\tau\cdot dr/d\tau + \frac{2}{\sin(\theta)}\cdot\cos(\theta)\cdot d\varphi/d\tau\cdot d\theta/d\tau = 0$$

$$f_1 \rightarrow d^2r/d\tau^2 + \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot\frac{m}{r^2}\cdot c^2\cdot dt/d\tau^2 - \frac{1}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2}\cdot dr/d\tau^2 - \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot r\cdot d\varphi/d\tau^2 = 0$$

$$f_3 \rightarrow d^2\varphi/d\tau^2 + \frac{2}{r}\cdot d\varphi/d\tau\cdot dr/d\tau = 0$$

すなわち， $\dfrac{d^2\varphi/d\tau^2}{d\varphi/d\tau} = \dfrac{-2}{r}\cdot dr/d\tau$

$$d_1 := 1$$

積分すれば， $\ln(d\varphi/d\tau) = -2\cdot\ln(r) + \ln(d_1)$ $\qquad d_1 := d_1$

したがって， $d\varphi/d\tau := \dfrac{d_1}{r^2} \qquad r^2\cdot d\varphi/d\tau \rightarrow d_1 \qquad (2.3.5)$

d_1は，単位質量あたりの角運動量を表す。一方，

$$\frac{f(0)}{c}\ \mathrm{expand} \rightarrow d^2t/d\tau^2 + \frac{2}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2}\cdot dt/d\tau\cdot dr/d\tau = 0 \qquad d_2 := 1 \qquad d_2 := d_2$$

上と同様に，

$$\frac{d^2t/d\tau^2}{dt/d\tau} = \frac{-2}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2}\cdot dr/d\tau \qquad \ln(dt/d\tau) = \int \frac{-2}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot\frac{m}{r^2}\,dr \rightarrow \ln(dt/d\tau) = \ln(r) - \ln(-r+2\cdot m)$$

結局，

$$dt/d\tau := \frac{d_2}{\left(1 - 2\cdot\frac{m}{r}\right)} \qquad (2.3.6)$$

f(1)の積分は直接求めにくいので， $ds^2 = -d\tau^2$ を用いて，

$$\text{-}ds^2/d\tau^2 := c^2\cdot\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot(dt/d\tau)^2 - \left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)^{-1}\cdot(dr/d\tau)^2 - r^2\cdot(d\theta/d\tau)^2 - r^2\cdot\sin(\theta)^2\cdot(d\varphi/d\tau)^2 = 1$$

$$\text{-}ds^2/d\tau^2 \to \frac{c^2}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot d_2^2 - \frac{1}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot dr/d\tau^2 - \frac{1}{r^2}\cdot d_1^2 = 1$$

これは，エネルギー保存の法則に相当している。結局，

$$dr^2/d\tau^2 := \left[\frac{c^2}{\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot d_2^2 - \frac{1}{r^2}\cdot d_1^2 - 1\right]\cdot\left(1-2\cdot\frac{m}{r}\right) \qquad (2.3.7)$$

$u := 1$

(2.3.5)によって，

$u := u$

$$dr^2/d\varphi^2 := \frac{dr^2/d\tau^2}{(d\varphi/d\tau)^2} \qquad dr^2/d\varphi^2 \;\Big|\begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{collect}, r\end{array} \to \frac{\left(c^2\cdot d_2^2-1\right)}{d_1^2}\cdot r^4 + 2\cdot\frac{m}{d_1^2}\cdot r^3 - r^2 + 2\cdot m\cdot r$$

$r := \frac{1}{u}$

とおくと，

$$\frac{1}{r^4}\cdot\left[\frac{\left(c^2\cdot d_2^2-1\right)}{d_1^2}\cdot r^4 + 2\cdot\frac{m}{d_1^2}\cdot r^3 - r^2 + 2\cdot m\cdot r\right] \text{ collect}, u \;\to 2\cdot m\cdot u^3 - u^2 + 2\cdot\frac{m}{d_1^2}\cdot u + \frac{\left(c^2\cdot d_2^2-1\right)}{d_1^2}$$

結局，

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = 2\cdot m\cdot u^3 + 2\cdot\frac{m}{d_1^2}\cdot u + \frac{\left(c^2\cdot d_2^2-1\right)}{d_1^2}$$

これを φ で微分すると，

$$2\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u\cdot\frac{du}{d\varphi} = \left(6\cdot m\cdot u^2 + 2\cdot\frac{m}{d_1^2}\right)\cdot\frac{du}{d\varphi}$$

すなわち，軌道方程式として次の結果を得る。

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3m\cdot u^2 + \frac{m}{d_1^2} \qquad (2.3.8)$$

ところで，(2.3.7)において， $m := 1$

$$U(r, d_1) := \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{d_1^2}{r^2}\right)$$

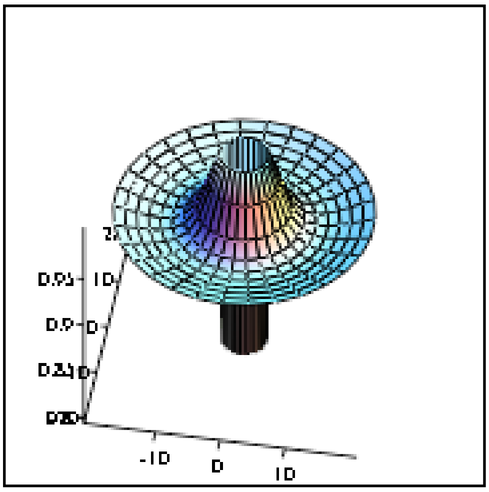
とおくと，これは角運動量を d_1 にとるときの重力による位置エネルギーの増減を表す関数となる。角運動量のある値について，「エネルギーの丘（谷）」は次のような形状をとる。

$\mathbf{d_1} := 4 \qquad \mathbf{ip} := 10 \qquad \mathbf{jp} := 30 \qquad \mathbf{R} := 20$

$\mathbf{i} := 0 .. \mathbf{ip} \qquad \mathbf{j} := 0 .. \mathbf{jp}$

$\mathbf{r_i} := 2 + \dfrac{(\mathbf{R} - 2)\,\mathbf{i}}{\mathbf{ip}} \qquad \varphi_{\mathbf{j}} := \dfrac{2\pi \cdot \mathbf{j}}{\mathbf{jp}}$

$\mathbf{X_{i,j}} := \mathbf{r_i} \cdot \sin(\varphi_{\mathbf{j}}) \qquad \mathbf{Y_{i,j}} := \mathbf{r_i} \cdot \cos(\varphi_{\mathbf{j}}) \qquad \mathbf{Z_{i,j}} := \mathbf{U}(\mathbf{r_i}, \mathbf{d_1})$



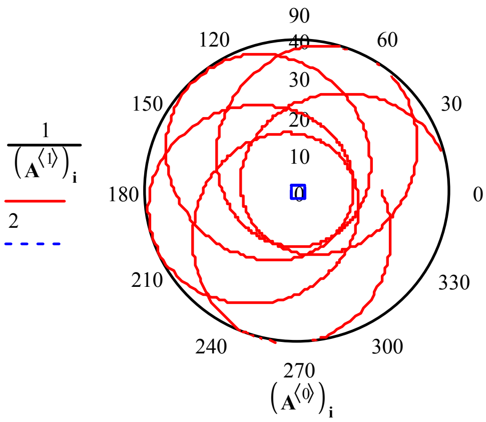
$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$

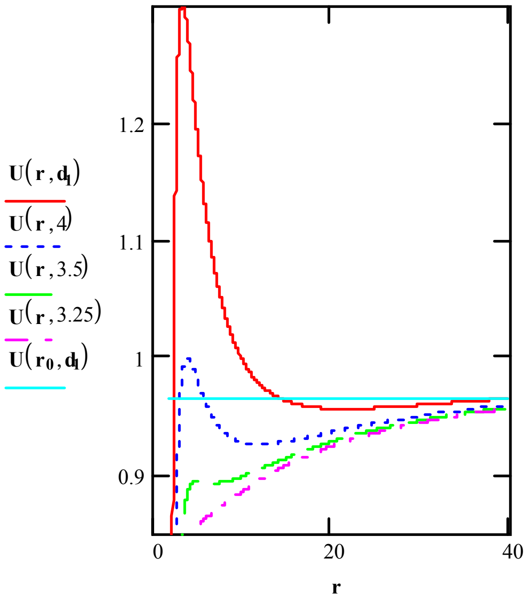
また，このような球対称場における質点の軌道の例をいくつか図示すると，以下のようになる。

$\mathbf{r} := 2, 2.01 .. 40 \qquad \mathbf{r_0} := 40 \qquad \mathbf{d_1} := 5$

$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathbf{r_0}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}(\varphi, \mathbf{u}) := \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ 3\,\mathbf{m} \cdot (\mathbf{u}_0)^2 - \mathbf{u}_0 + \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{d_1}^2} \end{bmatrix}$

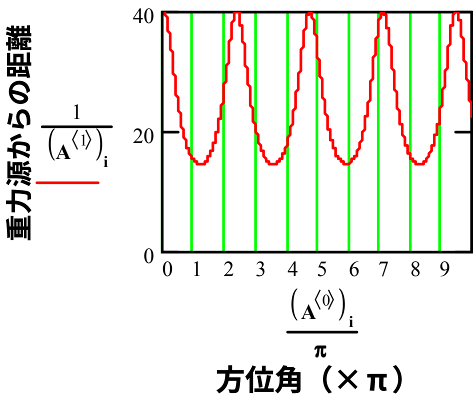
$\mathbf{A} := \mathbf{rkfixed}(\mathbf{u}, 0, 10\pi, 1000, \mathbf{D}) = 0 .. 1000$





この例は，近日点の移動を示している。

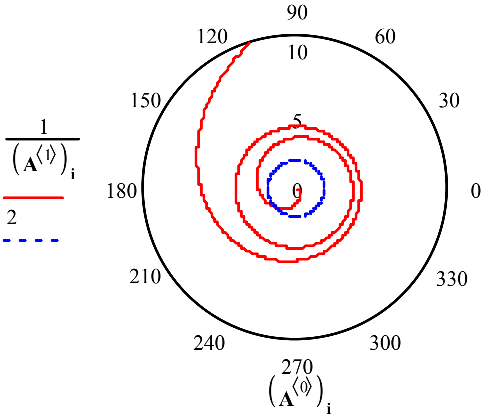
いわゆるSchwarzschilt半径を２としている。

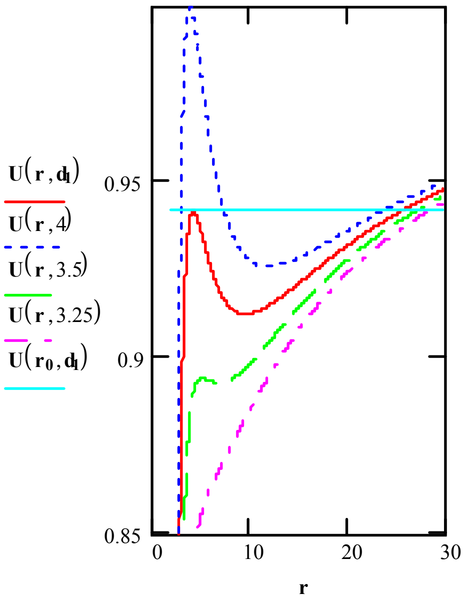


$\mathbf{r} := 2, 2.01 .. 30 \qquad \mathbf{r_0} := 25.7 \qquad \mathbf{d_1} := 3.75$

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} \frac{1}{r_0} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}(\varphi, \mathbf{u}) := \begin{bmatrix} u_1 \\ 3\,m\cdot(u_0)^2 - u_0 + \frac{m}{d_1^{\,2}} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} := \mathrm{rkfixed}(\mathbf{u}, 0, 6\pi, 1000, \mathbf{D}) \quad \mathbf{i} := 100 .. 1000$





この例は，Schwarzschild半径内への絶望的な落下を示している。

さて，以上は質量をもつ粒子の運動であるが，次に質量をもたない粒子たとえば光子の運動を解析してみよう。

$\mathbf{m} := \mathbf{m} \quad \mathbf{d_1} := \mathbf{d_1}$

この場合， $ds^2 = -d\tau^2 = 0$ なので， $d\tau$ を同様にあつかうことはできないが，いわゆるアッフィンパラメータ λ を用いることで解決する。測地線方程式の形は同じなので，前の結果を利用するためにここでは τ のままにしておく。

$\mathbf{r} := 1 \quad \mathbf{r} := \mathbf{r}$

$dr^2/d\tau^2 := dr^2/d\tau^2$

$$-ds^2/d\tau^2 := c^2\cdot\left(1 - 2\cdot\frac{m}{r}\right)\cdot\left(dt/d\tau\right)^2 - \left(1 - 2\cdot\frac{m}{r}\right)^{-1}\cdot dr^2/d\tau^2 - r^2\cdot\left(d\theta/d\tau\right)^2 - r^2\cdot\sin(\theta)^2\cdot\left(d\varphi/d\tau\right)^2 = 0$$

$$-ds^2/d\tau^2 \rightarrow \frac{c^2}{\left(1 - 2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot d_2^{\,2} - \frac{1}{\left(1 - 2\cdot\frac{m}{r}\right)}\cdot dr^2/d\tau^2 - \frac{1}{r^2}\cdot d_1^{\,2} = 0$$

$\mathbf{u} := 1$

$\mathbf{u} := \mathbf{u}$

(2.3.7)は，次のようにかきかえられる。

$$dr^2/d\tau^2 := c^2\cdot d_2^{\,2} + 2\cdot d_1^{\,2}\cdot\frac{m}{r^3} - \frac{1}{r^2}\cdot d_1^{\,2} \qquad (2.3.9)$$

(2.3.5)は同じで， $d\varphi/d\tau := \dfrac{d_1}{r^2}$

$$dr^2/d\varphi^2 := \frac{dr^2/d\tau^2}{\left(d\varphi/d\tau\right)^2}$$

とおくと，

$$\frac{1}{r^4}\cdot dr^2/d\varphi^2 \text{ collect}, r \rightarrow c^2\cdot\frac{d_2^{\,2}}{d_1^{\,2}} - \frac{1}{r^2} + 2\cdot\frac{m}{r^3}$$

$u := \dfrac{1}{r}$ とおいて，

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = 2\cdot m\cdot u^3 + c^2\cdot\frac{d_2^{\,2}}{d_1^{\,2}}$$

これを φ で微分すると，

$$2\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2}+2u\cdot\frac{du}{d\varphi}=6m\cdot u^2\cdot\frac{du}{d\varphi}$$

すなわち，軌道方程式として次の結果を得る。

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=3m\cdot u^2 \qquad (2.3.10)$$

前と同様に，光子の軌道をいくつかみてみよう。

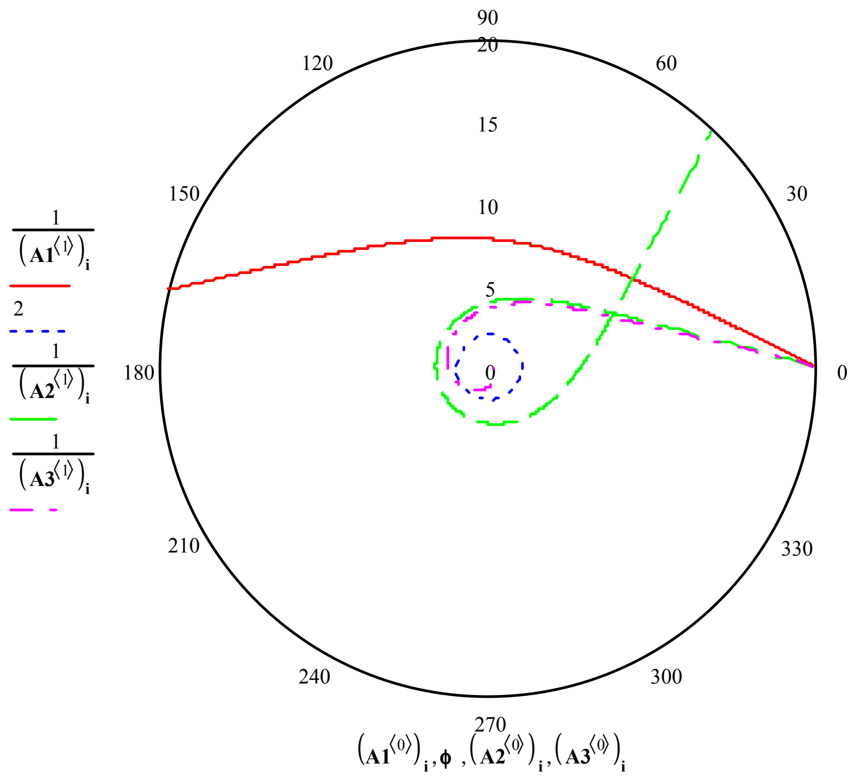
$r_0 := 20 \qquad m := 1$

$$u := \begin{pmatrix}\frac{1}{r_0}\\ 0.1\end{pmatrix} \qquad D(\varphi, u) := \begin{bmatrix}u_1\\ 3m\cdot(u_0)^2 - u_0\end{bmatrix}$$

$A1 := \mathrm{rkfixed}(u, 0, \pi, 1000, D) \quad i := 0 .. 1000 \qquad \phi := 0, \frac{\pi}{20} .. 2\pi$

$$u := \begin{pmatrix}\frac{1}{r_0}\\ 0.185\end{pmatrix} \qquad A2 := \mathrm{rkfixed}(u, 0, 2.3\pi, 1000, D)$$

$$u := \begin{pmatrix}\frac{1}{r_0}\\ 0.2\end{pmatrix} \qquad A3 := \mathrm{rkfixed}(u, 0, 2\pi, 1000, D)$$



重力場による光線の曲がりが示されている。
ブラックホールに接近しすぎると，光といえどものみこまれてしまう。