

自立型アーチ

福島県立若松女子高等学校 二瓶 厚

長方形の板を、図1のようにせり出ししながら順次重ねてゆくと、アーチ型が出来る。重ねた板全体の重心が台の端より内部にあれば、このアーチは崩れない。せり出しは、どこまで出来るのだろうか。

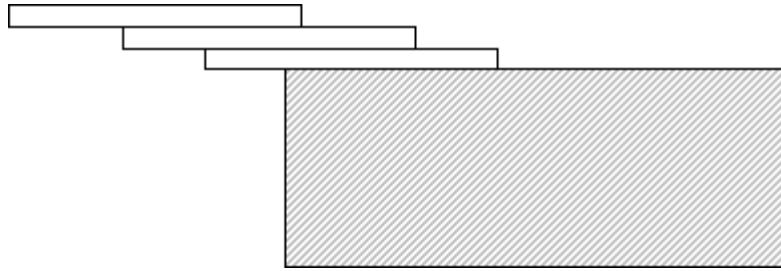


図 1

話を単純化するために、使う板は長方形で、みな同じ大きさ・質量で材質は均等とする。

板が1枚の時は、重心（G）が台の端までせり出すことが出来る。つまり板の長さの半分をせり出させる事が出来る。（図2）

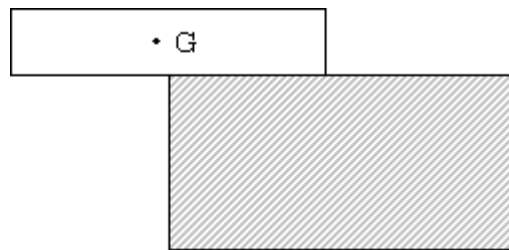


図 2

板が2枚の時は、上の板と下の板の合成重心が、台の端にあればよい。（図3）
台の端における、それぞれの板に働く重力のモーメントの釣り合いより、

$$mgx=mg(L/2-x)$$

（ただし、 m は板の質量、 g は重力加速度、 L は板の長さ、 x は下の板のせり出し量である。）
これを解いて、

$$x=L/4$$

つまり、2枚目の板はその長さの1/4だけせり出すことが出来る。

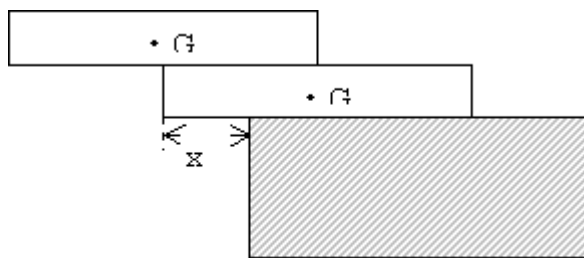


図 3

一般に、 n 枚の板の場合には、

$$(n-1)mgx_n=mg(L/2-x_n) \quad (\text{図4})$$

これを解いて、

$$x_n=L/(2n)$$

n が大きくなれば、 x_n は小さくなり0に近づく。つまり、せり出し量はどんどん少なくなって0に近づく。これは直感的に納得できるのであるが、一番上の板のせり出しはどうなるのだろうか。それぞれのせり出し量をすべて加えたのが一番上の板のせり出し量である。それを L_n とすると、

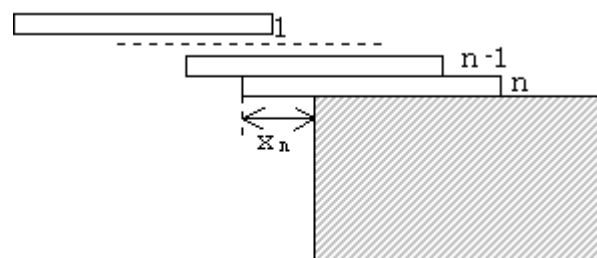


図 4

$$L_n = (L/2)(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n) \\ = (L/2)S_n$$

となるが、かつこ内は調和級数 S_n であり、 n が ∞ となる無限級数の場合、収束しない。つまり、せり出し量はいくらでも大きくなる。これは理解に苦しむ。

これは、あくまで数学上の結論であり、物理的に検討する必要がある。 S_n を与える一般式はないので、数値計算をしてみよう。右の表は、その結果である。なお、 L_n は板の長さ L を200mmとした時のせり出し量（mm）である。

表1より、 $n=4$ （4枚目）の時にはすでに板1枚分がせり出している。20枚目で5mm、30枚目でも3.3mmのせり出しである。1/ n の収束は非常に緩慢で、このために L_n は結果的にどんどん大きくなり、発散するのである。

$n=100$ 、200、300、400、500の時は表2に示す。

ちなみに S_n のグラフは次のようである。

グラフ 1

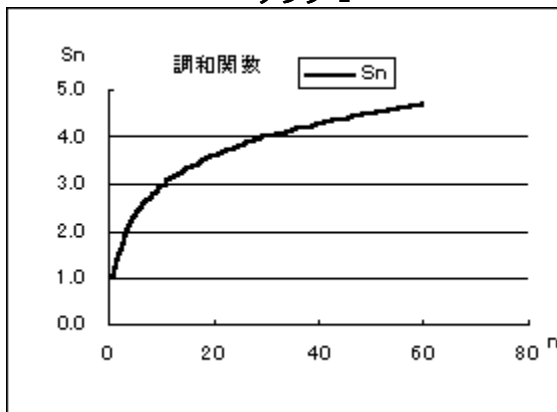


表 2				
n	1/n	S_n	$L/2n$	L_n
100	0.01000	5.18738	1.00	518.7
200	0.00500	5.87803	0.50	587.8
300	0.00333	6.28266	0.33	628.3
400	0.00250	6.56993	0.25	657.0
500	0.00200	6.79282	0.20	679.3

表 1				
n	1/n	S_n	$L/2n$	L_n
1	1.00000	1.00000	100.00	100.0
2	0.50000	1.50000	50.00	150.0
3	0.33333	1.83333	33.33	183.3
4	0.25000	2.08333	25.00	208.3
5	0.20000	2.28333	20.00	228.3
6	0.16667	2.45000	16.67	245.0
7	0.14286	2.59286	14.29	259.3
8	0.12500	2.71786	12.50	271.8
9	0.11111	2.82897	11.11	282.9
10	0.10000	2.92897	10.00	292.9
11	0.09091	3.01988	9.09	302.0
12	0.08333	3.10321	8.33	310.3
13	0.07692	3.18013	7.69	318.0
14	0.07143	3.25156	7.14	325.2
15	0.06667	3.31823	6.67	331.8
16	0.06250	3.38073	6.25	338.1
17	0.05882	3.43955	5.88	344.0
18	0.05556	3.49511	5.56	349.5
19	0.05263	3.54774	5.26	354.8
20	0.05000	3.59774	5.00	359.8
21	0.04762	3.64536	4.76	364.5
22	0.04545	3.69081	4.55	369.1
23	0.04348	3.73429	4.35	373.4
24	0.04167	3.77596	4.17	377.6
25	0.04000	3.81596	4.00	381.6
26	0.03846	3.85442	3.85	385.4
27	0.03704	3.89146	3.70	389.1
28	0.03571	3.92717	3.57	392.7
29	0.03448	3.96165	3.45	396.2
30	0.03333	3.99499	3.33	399.5

これらのデータをもとに、実際の板で積み上げをしてみた。長さ200mm、幅30mmのプラスチック板30枚を利用した。1枚目から30枚目までのそれぞれの板のせり出し量は、表1の $L/2n$ 値を使用する。ただし、現実的には長さ・質量・形共に不揃いのために重心の位置のばらつきがあるだろうし、肉眼・手作業では、1/10mmの差異の区別は出来ない。従って、計算上の値より2mm短く設定した。27枚目以上は、ほとんど同じ程度のせり出しである。ましてや、100枚目を越えれば1枚、1枚の区別は肉眼では無理である。

L を大きく取れば相対的に区別は出来るが、物体としての板の歪み（傾き）が大きくなっていく（写真1）今回行った30枚の板でも、かなりの板の歪みが見られた。実際の問題としては100枚に達する前に積み重ねは出来なくなるであろう。材質として、自重にどこまで耐えられるかは調査していないが、このあたりが、現実の限界であろうか。

写真 1

