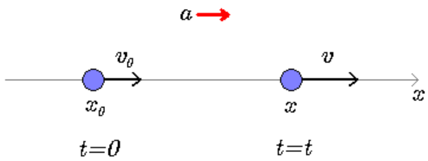
coffee break

11

速度・距離公式と保存量

等加速度運動の速度・距離公式

一定の加速度 a で x 軸方向に運動する場合の速度・距離公式は，初めの位置 x_0，初速度 v_0 として次のように書けます。



$$\begin{array}{ll} \text{速　度} & v = v_0 + at \\ \text{位　置} & x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ \text{おまけ} & v^2 - {v_0}^2 = 2a(x - x_0) \end{array}$$

速度と移動距離の関係を表す「おまけ」の式は，速度と位置の公式から t を消去して得られます。また，位置⇔速度⇔加速度の関係が微分・積分で結ばれていることももうご存知ですね？

運動量・エネルギー変化の式

さて，すでに気づいている人もいることと思いますが，等加速度直線運動に関する限り，これらは運動量や運動エネルギーといった量の変化を表す式と同等です。速度の式に m，おまけの式には $m/2$ を両辺にかけて，

運動の法則　$ma = F$

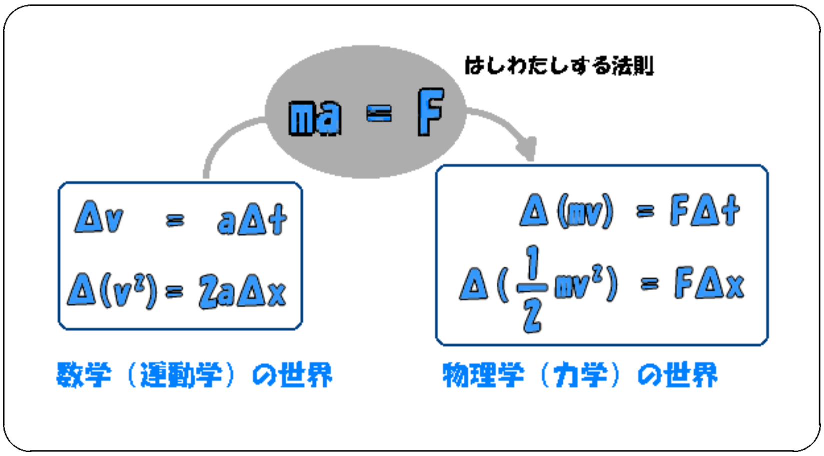
を使えば，

$$mv - mv_0 = Ft$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = F(x - x_0)$$

となりますが，上は「運動量の変化＝力積」，下は「運動エネルギーの変化＝仕事」という意味を表していますね？　（ちなみに，3 つの式を「結果＝原因」という形にそろえてみましたがどうでしょう，美しいと思いませんか？　t を $(t - t_0)$ と置き換えるともっといいかも。）

もちろんみなさんは，いずれの式もすでに自由に記憶から引き出して活用できるようになっていることとは思いますが，速度・距離公式と運動量・エネルギー変化の式が同じものであることを意識していましたか？　両者を橋渡ししているのが，$ma = F$ すなわち運動の法則なのです。



運動方程式の積分

ちなみに，以上の関係式を積分の形に書き直すと，

$$v - v_0 = \int_0^t a dt \quad \rightarrow \quad mv - mv_0 = \int_0^t F dt$$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2\int_{x_0}^x a dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \int_{x_0}^x F dx$$

となります。これは加速度（力）が変化する場合にも成り立つ，より一般の法則を表しています。逆に，これらを微分の形にもどせば，

$$\frac{dv}{dt} = a \qquad \rightarrow \quad \frac{d(mv)}{dt} = F$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dx} = a \qquad \rightarrow \quad \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dx} = F$$

となりますが，上の式は運動方程式そのものであり，下の式はさらに

$$\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{d(v^2)}{dv}\frac{dv}{dx} = 2v\frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = 2a \qquad \left(\frac{dv}{dt} = a, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}\right)$$

であることにより，運動方程式にもどります。

結論として，

運動方程式の時間 t による積分　→　運動量変化の式
運動方程式の位置 x による積分　→　運動エネルギー変化の式

ということになるようです。さらに作用反作用の法則によって運動量保存則，保存力における位置エネルギーの導入によって力学的エネルギー保存則が導かれます。力学上の保存則のすべて（保存則にはもうひとつ，ケプラーの「面積速度一定の法則」と同等な「角運動量保存則」というものがあります。）は，数学的にはニュートンの運動法則に帰着するのです。