



「次元」というもの

単位について深く理解すると、物理量の「次元」というものにいきあたります。「4次元ポケット」の次元とことばは同じですが、意味はちょっとちがうかな？ わかりやすくいえば、その量がどういう基本量から構成されているか、またはその量の単位がどういう組立単位であるかということと同じです。「次元」の考え方は、物理計算の見通しをよくしたり、ときによっては法則を表す方程式の形を推定したりすることにも応用される強力なものです。

単位と次元

すべての物理量は、わずか（最低で質量・長さ・時間の3つ）の基本的な量の乗除で表されます。簡単にいえば「次元」というのはその乗除の構成をいいます。他の量では表せない基本量である質量・長さ・時間はそれぞれ独立した次元をもつとします。そして、たとえば「面積は長さの2乗の次元をもつ」というように表現します。組立単位のことを考えれば、その意味は明らかですね。次にいろいろな量とその組立単位、次元の記号による表記をあげてみましょう。

物理量	単位	次元
質量	[kg]	M
長さ	[m]	L
時間	[s]	T
密度	[kg/m ³]	ML^{-3}
力	[N] = [kg · m/s ²]	MLT^{-2}
エネルギー	[J] = [N · m] = [kg · m ² /s ²]	ML^2T^{-2}
⋮		

練習問題

次の量の次元を記号で書いてみよう。

- (1) 人口密度
- (2) 仕事率
- (3) 圧力
- (4) バネ定数

計算結果の次元をたしかめる

次元の考え方を応用して、計算結果をたしかめる例をあげます。

問題

(問題文略)

選択肢 (ただし $L[m]$, $v[m/s]$, $g[m/s^2]$)

$$\begin{array}{llllll} \cos \theta \sin \theta = (\text{ア}) & \rightarrow (a) \frac{L}{v} & (b) \frac{g}{2v} & (c) \frac{Lg}{v^2} & (d) \frac{L^2g}{v^2} & (e) \frac{Lg^2}{2v^2} \\ \text{高さ (イ)} \times \sin^2 \theta [m] & \rightarrow (a) \frac{L}{g} & (b) \frac{L^2}{2g} & (c) \frac{v}{2g} & (d) \frac{v^2}{2g} & (e) \frac{v^2}{2g^2} \end{array}$$

(立教大より)

問題文もなく解けるわけないと思うかもしれませんが、(ア)(イ)に適する式を選ぶためにはこれだけの情報で十分です。選択肢のそれぞれの単位を計算するか、または同じことですが次元を書いてみればよいのです。(ア)に入る量は無次元(イ)に入る量の次元は長さ L ですから、選択肢の中ではそれぞれに適するものは1つしかありません。

物理の複雑な式計算をするとき、計算があっているかどうかを確かめる際にはぜひ次元の確認をすることをおすすめします。検算をするまでもなく次元が求めるものに一致していなければ、与えられた式が違っているか計算の途中にミスがあるかのどちらかだからです。もちろん、次元の記号による表現を用いてもいいのですが、単位をいっしょに計算するというと同じですからそういう習慣をつけておくのがいいかもしれませんね。

法則を導くウラわざ...次元解析

ある物理量を導く公式や、法則を表す方程式の形を推定するときに次元の考え方を適用することができます。

例 単振りこの周期

質量の無視できる系におもりをむすびつけた振りこの周期を考えます。周期に関係すると思われる物理量をあげると、

おもりの質量	m	(次元 M)
糸の長さ	l	(次元 L)
重力加速度	g	(次元 LT^{-2})

が考えられます。求める周期の次元は時間 (T) ですから、これらを組み合わせて周期を導く計算式を、

$$T = a \cdot m^x \cdot l^y \cdot g^z \quad (a \text{ は次元のない定数})$$

とおくとこの次元は、

$$T = (M)^x \cdot (L)^y \cdot (LT^{-2})^z$$

と書けます。そこで、両辺の次元を比較すると $x \cdot y \cdot z$ の間には次の関係が成立することになります。

$$x = 0, \quad y + z = 0, \quad -2z = 1$$

これを解くと、 $(x, y, z) = (0, 1/2, -1/2)$ となりますから推定される周期の式は、

$$T = a \cdot m^0 \cdot l^{1/2} \cdot g^{-1/2} = a \sqrt{\frac{l}{g}}$$

となります。実際の公式では $a = 2\pi$ となっています。

練習問題 ばね振りこの周期を与える式を考えてみよう。