



運動法則と保存則

力学（力と運動）の範囲で最も重要な法則として、運動法則・運動量保存則・力学的エネルギー保存則があげられます。これらの法則の間の関係はどうなっているのでしょうか？

微分・積分を使いこなすとこれらの法則の間の数学的な関係はかなり見通しがよくなるのですが、高校物理では微分・積分を使わないことになっていることもあって、これらの法則の間の関係がすっきりしない感がありますね。微分・積分の初歩的な考え方を使ってあらためて整理し、少し見通しをよくしてみたいと思います。

変化の割合と微分

まず、微分・積分の基本的な考え方について簡単におさえておきましょう。たとえば速さの定義は、

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

と表されます。ここで Δ は、それがついた量の変化量を表すことはもう知っていますね？ x は距離（より正確には位置座標）、 t は時間（時刻）を意味していますから、速さ = 距離 ÷ 時間というのと同じです。この Δ を限りなく小さくとしたものが微分記号の d であるわけです。したがって、この d を使うと瞬間の速さの定義が得られます。

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ちなみに加速度の定義は、

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

たとえば dx は x の微小変化を表すのであって、決して $d \times x$ ではないのですが、形式的に掛け算のように扱って上のように書きます。

ここでは微分・積分に深入りしないいましめと、変化量の意味を強調する意図で Δ で微小変化を表わすものとします。そこで、運動方程式は次のようになります。

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F$$

運動法則と運動量保存則

質量 m が変化する場合も含むように書き換えると、

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = F \quad \text{または} \quad \Delta(mv) = F \Delta t$$

となりますから、運動量の変化 = 力積を意味します。したがって $F = 0$ の場合は $\Delta(mv) = 0$

すなわち $mv = \text{一定}$ となり、これは $m = \text{一定}$ のときは慣性の法則にほかなりません。

また、質量 m_1, m_2 の二つの物体が相互に力 F を及ぼしあうときは、作用反作用の法則が成り立ちますから、向きも考慮して次のように書けます。

$$\frac{\Delta(m_1 v_1)}{\Delta t} = F, \quad \frac{\Delta(m_2 v_2)}{\Delta t} = -F$$

辺々加えると、

$$\frac{\Delta(m_1 v_1)}{\Delta t} + \frac{\Delta(m_2 v_2)}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{\Delta t} = 0$$

したがって、次の運動量保存則を得ます。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{一定}$$

整理すると、運動法則の成立を前提とした上で、

「運動量保存則は作用反作用の法則と同等である」

といえます。

運動法則と力学的エネルギー保存則

今度はエネルギー保存について考えてみます。まず、力 F が距離 Δx の移動の間はたらくとして、このとき物体がされた仕事は運動方程式を用いて次のようになります。

$$F \Delta x = \frac{m \Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta x = m \Delta v \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = mv \Delta v$$

ここでは、簡単にするため m が変化しないものとししました。ところで、 v^2 という量の変化をとってみると、

$$\Delta(v^2) = (v + \Delta v)^2 - v^2 = 2v \Delta v + (\Delta v)^2$$

となりますが、 $(\Delta v)^2$ は2次の微小量といって、最終的には（微分によって）消える運命にあるので無視できます。これを用いると、

$$F \Delta x = \frac{1}{2} m \Delta(v^2) = \Delta\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

となります。これは仕事をされた分だけ運動エネルギーが増えることを意味しています。さらに、

$$\Delta U = -F \Delta x$$

なる量 U を導入すると、

$$\Delta\left(\frac{1}{2} m v^2 + U\right) = 0$$

すなわち、

$$\frac{1}{2} m v^2 + U = \text{一定}$$

を得ます。これが力学的エネルギー保存則であり、 U を位置エネルギーと呼んでいるわけです。結局のところ、

「力学的エネルギー保存則は運動法則と同等である」

といえるのです。