

コンデンサーの貯水槽モデル

高橋 善樹 福島県立会津高等学校, 965-0831 会津若松市表町 3-1

BXT02731@nifty.ne.jp, <http://homepage2.nifty.com/ysc/>

直流回路の水流モデルは、とりわけ電位を高さにおきかえることにより、起電力や電圧降下の理解を助けるアナロジーとして多用されるものである。コンデンサーは、水流モデルにおいて貯水槽にたとえることができるが、そのエネルギーの評価においても重力による位置エネルギーとの対応により類推が可能である。コンデンサーの貯水槽モデルの有効性と限界について整理する。

1 コンデンサーのエネルギー

高校物理で扱うコンデンサーに関する学習内容のひとつとして、コンデンサーに蓄えられるエネルギーが次のような式で出てくる。

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

一般にその説明として、コンデンサーの電圧と電荷の関係を表す $V-Q$ グラフ (図 1) の面積、すなわち積分

$$U = \int_0^Q V(Q)dQ$$

が用いられる。

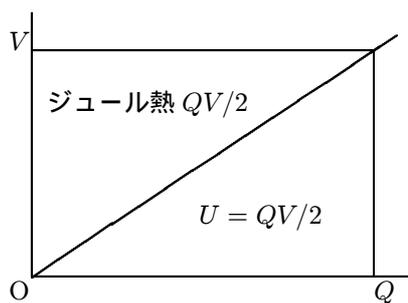


図 1: コンデンサーの $V-Q$ グラフとエネルギー

しかし、このグラフが運動解析における $v-t$ グラフのように時間変化を表わすものでないことに加えて、単に電荷 Q を電位 V に引き上げる仕事

$$W = QV$$

との違いが生徒にとっては自明でなく、理解に困難と混乱が生じるもととなっている。

教科書によっては、起電力 V による定電圧充電における電源のなす仕事 QV とコンデンサーに蓄えられるエネルギー $QV/2$ の差がジュール熱によって生じることを正しく補足しているものもあるが、ひとことの補足では理解しにくい。実際、このジュール熱による損失を理解しないと例えば次のような問題に対して正しい判断がつかないと思われる。

問題 電圧 V_1 で電荷 Q_1 に充電されたコンデンサーを、より高い電圧 V_2 の電池で追加充電して電荷が Q_2 になったとする。電池が供給した仕事 (消費電力量) ΔW はいくらか。次から正しいものを選べ。

(1) 電圧 V で電荷 Q に充電されたコンデンサーのエネルギーは、 $U = QV/2$ だから、その差が電池の供給した仕事である。

$$\Delta W = U_2 - U_1 = (Q_2V_2 - Q_1V_1)/2$$

(2) 電圧 V で電荷 Q に充電するのに必要な仕事 (電力量) は、 $W = QV$ だから、その差が電池の供給した仕事である。

$$\Delta W = W_2 - W_1 = Q_2V_2 - Q_1V_1$$

(3) 追加する電荷は、 $\Delta Q = Q_2 - Q_1$ だから、これを電位差 V_2 だけ引き上げる仕事を電池が供給したがって、

$$\Delta W = \Delta QV_2 = (Q_2 - Q_1)V_2$$

(正解は (3))

2 貯水槽モデルのエネルギー評価

前述のような困難への対処として、以下のようなコンデンサーの貯水槽モデルがアナロジーとして有効であると考えられる。(図2)

電池(揚水ポンプ)で高さ V までもちあげられた電荷(水)はコンデンサー(貯水槽)に落下して落ち着く過程でエネルギーを失う。満杯になったときコンデンサー(貯水槽)に蓄えられた電荷(水)の電場による(重力による)位置エネルギーは半分の高さ $V/2$ (重心)に電荷 Q (水の質量)を集中させたのと同様となる。

電圧を徐々に上げながら微小な電流で充電すれば、ジュール熱による損失をおさえて電源の供給する仕事を $QV/2$ に近づけることができるわけである。

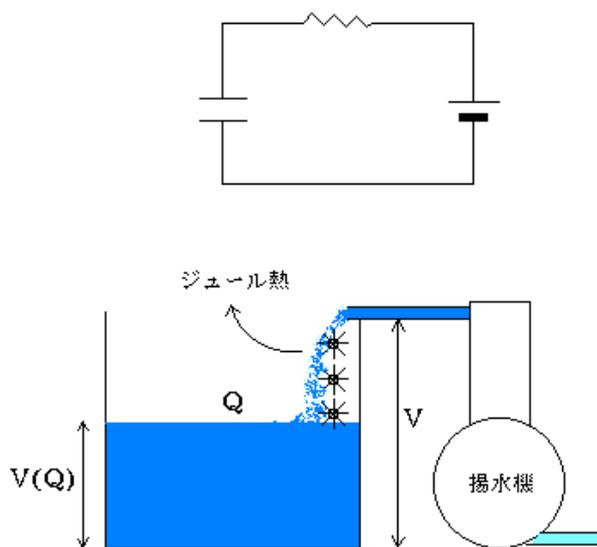


図2: コンデンサーの貯水槽モデル

3 充放電の過渡現象の再現

前述の貯水槽モデルの難点のひとつは、充電・放電における過渡現象が再現できないことにある。直流回路の水流モデル一般にいえる困難として、抵抗の直感的かつ正確な対応物が得にくいことがあげられるが、コンデンサーの充放電における電荷または電圧の時間変化を議論するには抵抗の存在が欠かせない。実際、図2の充電モデルではコンデンサーの電位(水位)にかかわらず電流(揚水の流速)が一定になってしまうし、また単に下から無抵抗で放水するのみの放電モデルを考えれば放電流(放水の流速)は、電位(水位)に比例せず、その平方根に比例することになる。

この難点を解決するために、抵抗の対応物として細い放水管または多孔質のフィルターのようなものを考えることは、モデル改良の一例である。実際、そうした抵抗を経由した「漏水」のような状態での放水の流速は、水圧にほぼ比例し、したがってまた水平断面積が一定の柱状貯水槽からの放水では水位に比例する。

気柱共鳴装置のガラス管を使って、出口に竹箸を差し込んでそのすきまから水が漏れ出る状態で実験したところ、水位の時間変化はコンデンサーの放電曲線と同じ指数関数曲線にほぼ一致する結果が得られた(図3)。ちなみにこの結果は、管内を流れる粘性を無視できない流体の速度が圧力傾度に比例するという流体力学の理論に合致するものである。

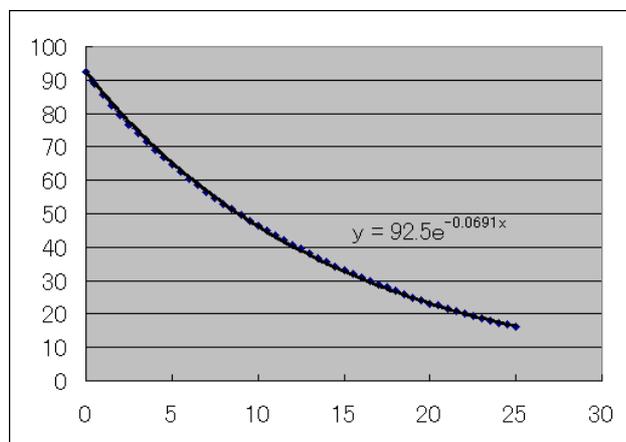


図3: 柱状水槽からの漏水における水位 [cm] の時間 [分] 変化 (近似曲線およびその式を付加した。半減期は $\log 2 / 0.0691 = 10$ 分。)

4 水流モデルの有効性と限界

以上、コンデンサーの貯水槽モデルの有効性とその改良について示したが、なおかつ完全を期し得ないモデルとしての限界が存在する。例えば、漏水モデルを充電に適用することは可能(給水圧一定のポンプからフィルターを経由して下から給水するなど)だが、かえって作弄的でわかりにくいものとなるおそれがある。

直流回路の水流モデル一般にこうした解決困難な限界があることは否めない。しかし、その限界をわきまえながら工夫すれば、目に見えぬ電流現象の直感的理解を助けるものとして水流モデルは依然有効な道具であると考えられる。