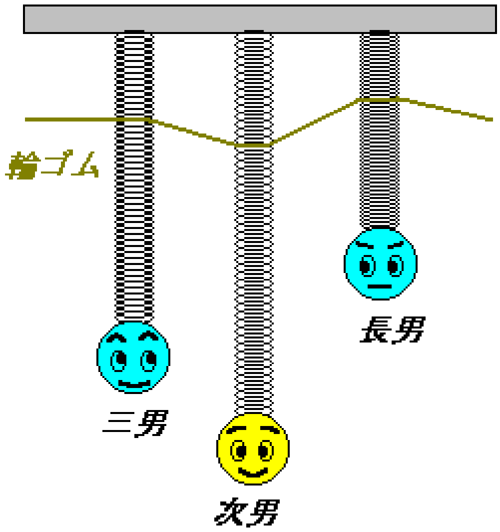
2000.09.15

連成ばね振子

喜多方工業高校　高橋　善樹

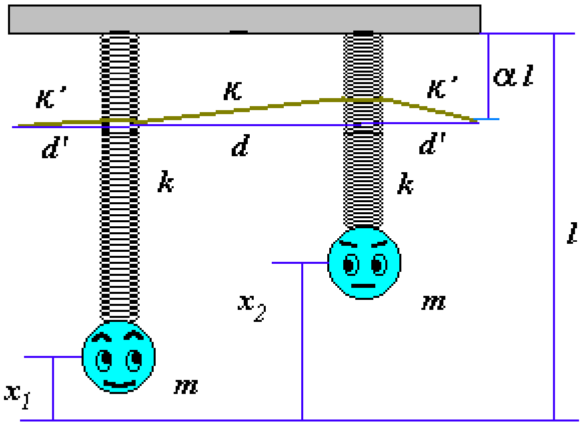


0.「ふりこ三兄弟」に魅せられて

高教研理科部会の県大会で，松岡さんが報告された「ふりこ三兄弟」は，とても魅力的な題材ですっかりとりこになってしまった。いただいたキットを早速組み立てて遊びまくり，また力学シミュレータ **Interactive Physics** によるシミュレーションも実行してみた。その過程で，紹介されたいくつかの共振パターンについてはある程度の解釈がついた。しかし，複雑で長周期のプロセスを繰り返す場合については，理論的な解析に待つべき難解さがある。

この夏，振動にのめりこんだいきおいで「三兄弟」にとりくんでみようと思う。

1. 2連ばね振子の共振



まず，手始めに2連振子の共振を解析してみよう。

おもりの質量 m，ばねの平衡長 l，ばね定数 k は両者同じとし，いずれも平衡時に支点から αl のところにゴムが固定されているとする。また3本にわかれたゴムの平衡時の長さとばね定数は，式の簡略化のため $d=d'$，$\kappa=\kappa'$ とする。

おもりの平衡位置からの変位を x_1，x_2 **とし，ゴムによる結合は十分弱いとすれば，ゴムののびは例えば中央で，**

$$\sqrt{d^2+\alpha^2(x_2-x_1)^2}-d$$

$$\sim \frac{\alpha^2(x_2-x_1)^2}{2d}$$

などとなる。ただし，$d \gg \alpha x_1$，αx_2 として近似をとった。実際の使用時にゴムは約2倍に伸びていることも考慮する。

系の位置エネルギーおよび運動エネルギーは，次のようになる。

$$U := \frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\kappa\cdot\left[\left(\frac{\alpha^2 x_1^{\,2}}{2d}+\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha^2 x_2^{\,2}}{2d}+\frac{d}{2}\right)^2+\left[\frac{\alpha^2(x_2-x_1)^2}{2d}+\frac{d}{2}\right]^2\right]$$

$$K := \frac{1}{2}m\cdot\left(x'^{\,2}_1+x'^{\,2}_2\right)$$

ラグランジアン $L := K - U$ から運動方程式を導けば，

$$\frac{d}{dx'_1}L \rightarrow m\cdot x'_1$$

$$\frac{d}{dx_1}L \rightarrow -k\cdot x_1-\frac{1}{2}\cdot\kappa\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{x_1^{\,2}}{d}+\frac{1}{2}\cdot d\right)\cdot\alpha^2\cdot\frac{x_1}{d}-2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{d}+\frac{1}{2}\cdot d\right]\cdot\alpha^2\cdot\frac{(x_2-x_1)}{d}\right]$$

$$\frac{d}{dx'_2}L \rightarrow m\cdot x'_2$$

$$\frac{d}{dx_2}L \rightarrow -k\cdot x_2-\frac{1}{2}\cdot\kappa\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{x_2^{\,2}}{d}+\frac{1}{2}\cdot d\right)\cdot\alpha^2\cdot\frac{x_2}{d}+2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{d}+\frac{1}{2}\cdot d\right]\cdot\alpha^2\cdot\frac{(x_2-x_1)}{d}\right]$$

整理すると,

$$x''_1 = -\frac{k}{m}\cdot x_1 - \frac{\kappa\cdot\alpha^2}{2m}\cdot\left[1+\frac{\alpha^2}{d^2}\cdot\left(x_1{}^2 - x_1\cdot x_2 + x_2{}^2\right)\right]\cdot\left(2x_1 - x_2\right)$$

$$x''_2 = -\frac{k}{m}\cdot x_2 - \frac{\kappa\cdot\alpha^2}{2m}\cdot\left[1+\frac{\alpha^2}{d^2}\cdot\left(x_1{}^2 - x_1\cdot x_2 + x_2{}^2\right)\right]\cdot\left(2x_2 - x_1\right)$$

となる。

「ふりこ三兄弟」のパラメータを用いて，数値積分を実行してみよう。ただし，振子の間隔は式に合うように調整することにする。

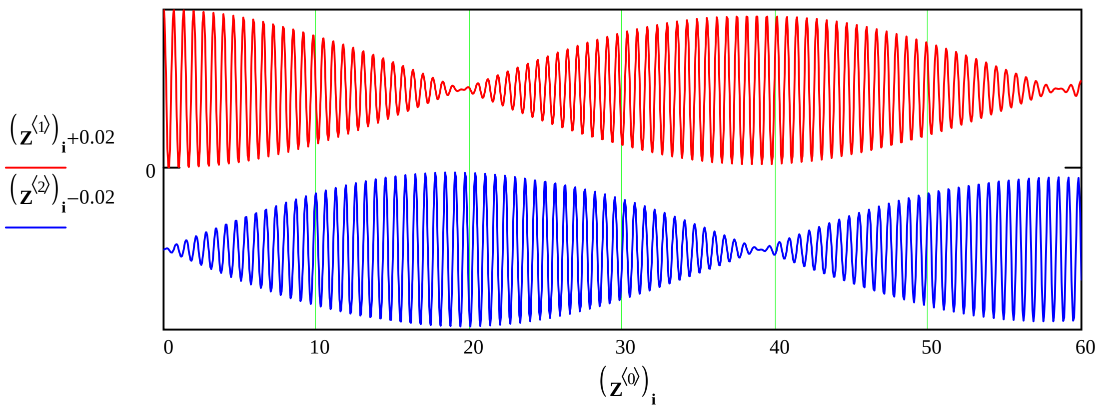
$$m := 0.0556 \qquad \alpha := \frac{18}{150} \qquad k := 5 \qquad \kappa := 12 \qquad d := 0.045$$

$$x_{10} := 0.02 \qquad x_{20} := 0$$

$$x'_{10} := 0 \qquad x'_{20} := 0$$

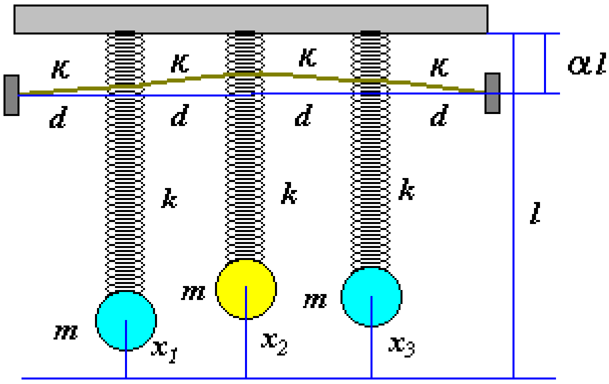
$$X := \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x'_{10} \\ x'_{20} \end{pmatrix} \qquad D(t, X) := \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ -\frac{k}{m}\cdot X_0 - \frac{\kappa\cdot\alpha^2}{2\cdot m}\cdot\left[1+\frac{\alpha^2}{d^2}\cdot\left[(X_0)^2 - X_0\cdot X_1 + (X_1)^2\right]\right]\cdot(2\cdot X_0 - X_1) \\ -\frac{k}{m}\cdot X_1 - \frac{\kappa\cdot\alpha^2}{2\cdot m}\cdot\left[1+\frac{\alpha^2}{d^2}\cdot\left[(X_0)^2 - X_0\cdot X_1 + (X_1)^2\right]\right]\cdot(2\cdot X_1 - X_0) \end{bmatrix}$$

$$Z := \mathrm{rkfixed}(X, 0, 60, 1200, D) \qquad i := 0 .. 1200$$



共振周期は，αとκの変化に対してかなりクリティカルに反応する。特に，ゴムのばね定数κは伸ばし具合で大きく変動し，なおかつ1本1本でかなりの差もあると思われるので，使用状態での値を特定するのは困難である。実験値は約40[sec.]（60振動）だが，κについては実測と矛盾しない範囲で推定可能な最低値にして，ようやくシミュレーションでの一致をみた。

2. 3連ばね振子の解析



2連の場合と同様のモデルで3連共振の解析をする。パラメータは2連と同様とし，ただしゴムの自然長からの伸びを一般化して$\beta\,\mathbf{d}$とした。
エネルギーの表式は次のようになる。

$$\mathbf{K} := \frac{1}{2}\mathbf{m}\cdot\left(\mathbf{x'_1}^2 + \mathbf{x'_2}^2 + \mathbf{x'_3}^2\right)$$

$$\mathbf{U} := \left[\frac{1}{2}\cdot\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{x_1}^2+\mathbf{x_2}^2+\mathbf{x_3}^2\right)\right] \ldots$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\kappa\cdot\left[\left(\frac{\alpha^2\cdot\mathbf{x_1}^2}{2\cdot\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right)^2+\left[\frac{\alpha^2\cdot(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})^2}{2\cdot\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right]^2 \ldots \atop +\left[\frac{\alpha^2\cdot(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_3})^2}{2\cdot\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right]^2+\left(\frac{\alpha^2\cdot\mathbf{x_3}^2}{2\cdot\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right)^2\right]$$

$\mathbf{L} := \mathbf{K}-\mathbf{U}$ により，

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx_1}}\mathbf{L} \rightarrow -\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_1}-\frac{1}{2}\cdot\kappa\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{\mathbf{x_1}^2}{\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right)\cdot\alpha^2\cdot\frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{d}}+2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})^2}{\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right]\cdot\alpha^2\cdot\frac{(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})}{\mathbf{d}}\right]$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx_2}}\mathbf{L} \rightarrow -\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_2}-\frac{1}{2}\cdot\kappa\cdot\left[-2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})^2}{\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right]\cdot\alpha^2\cdot\frac{(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})}{\mathbf{d}}+2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_3})^2}{\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right]\cdot\alpha^2\cdot\frac{(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_3})}{\mathbf{d}}\right]$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx_3}}\mathbf{L} \rightarrow -\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_3}-\frac{1}{2}\cdot\kappa\cdot\left[-2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_3})^2}{\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right]\cdot\alpha^2\cdot\frac{(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_3})}{\mathbf{d}}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\frac{\mathbf{x_3}^2}{\mathbf{d}}+\beta\cdot\mathbf{d}\right)\cdot\alpha^2\cdot\frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{d}}\right]$$

となり，これを整理して以下の運動方程式を得る。

$$\mathbf{x''_1} = -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{x_1}-\frac{\kappa\cdot\alpha^2}{2\mathbf{m}}\cdot\left[2\cdot\beta+\frac{\alpha^2}{\mathbf{d}^2}\cdot\left(\mathbf{x_1}^2+\mathbf{x_2}^2-\mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x_2}\right)\right]\cdot\left(2\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right)$$

$$\mathbf{x''_2} = -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{x_2}-\frac{\kappa\cdot\alpha^2}{2\cdot\mathbf{m}}\cdot\left[2\cdot\beta+\frac{\alpha^2}{\mathbf{d}^2}\cdot\left(\mathbf{x_1}^2+\mathbf{x_2}^2+\mathbf{x_3}^2-\mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x_2}-\mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x_3}-\mathbf{x_3}\cdot\mathbf{x_1}\right)\right]\cdot\left(2\cdot\mathbf{x_2}-\mathbf{x_1}-\mathbf{x_3}\right)$$

$$\mathbf{x''_3} = -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{x_3}-\frac{\kappa\cdot\alpha^2}{2\mathbf{m}}\cdot\left[2\cdot\beta+\frac{\alpha^2}{\mathbf{d}^2}\cdot\left(\mathbf{x_3}^2+\mathbf{x_2}^2-\mathbf{x_3}\cdot\mathbf{x_2}\right)\right]\cdot\left(2\mathbf{x_3}-\mathbf{x_2}\right)$$

３.「ふりこ三兄弟（松岡振子）」の共振モード

松岡さんが報告された「三兄弟」（すてきな題材の提供に敬意を表して「松岡振子」と呼ぶことにしたい）の共振モードについて，数値積分によるシミュレーションをしてみた。**Interactive Physics** でもシミュレートしたが，初期設定がむずかしく，なかなかきれいなパターンが出ないモードもあった。今度の数値解析では，報告されたすべてのモードできれいな共振パターンが現れた。

特に解釈に悩んだ「長男」のみに初期変位を与えた場合について，シミュレーションの結果を示しておく。「次男」の共振のひと山を介して，「長男」と「三男」がエネルギーを交換して交互に共振する様子がよくわかる。

$\mathbf{m} := 0.0556 \quad \boldsymbol{\alpha} := \frac{18}{150} \quad \mathbf{k} := 5 \quad \boldsymbol{\kappa} := 22 \quad \mathbf{d} := 0.025 \quad \boldsymbol{\beta} := 0.5$

$\mathbf{x_{10}} := 0.02 \quad \mathbf{x_{20}} := 0 \quad \mathbf{x_{30}} := 0$

$\mathbf{x'_{10}} := 0 \quad \mathbf{x'_{20}} := 0 \quad \mathbf{x'_{30}} := 0$

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} \mathbf{x_{10}} \\ \mathbf{x_{20}} \\ \mathbf{x_{30}} \\ \mathbf{x'_{10}} \\ \mathbf{x'_{20}} \\ \mathbf{x'_{30}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{X}) := \begin{bmatrix} \mathbf{X}_3 \\ \mathbf{X}_4 \\ \mathbf{X}_5 \\ -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{X}_0 - \frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\alpha}^2}{2 \cdot \mathbf{m}} \cdot \left[2 \cdot \boldsymbol{\beta} + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\mathbf{d}^2} \cdot \left[(\mathbf{X}_0)^2 + (\mathbf{X}_1)^2 - \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{X}_1 \right] \right] \cdot (2 \cdot \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1) \\ -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{X}_1 - \frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\alpha}^2}{2 \cdot \mathbf{m}} \cdot \left[2 \cdot \boldsymbol{\beta} + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\mathbf{d}^2} \cdot \left[\begin{array}{l} (\mathbf{X}_0)^2 + (\mathbf{X}_1)^2 + (\mathbf{X}_2)^2 \; ... \\ + -\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_0 \end{array} \right] \right] \cdot (2 \cdot \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_2) \\ -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{X}_2 - \frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\alpha}^2}{2 \cdot \mathbf{m}} \cdot \left[2 \cdot \boldsymbol{\beta} + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\mathbf{d}^2} \cdot \left[(\mathbf{X}_2)^2 + (\mathbf{X}_1)^2 - \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1 \right] \right] \cdot (2 \cdot \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Z} := \mathbf{rkfixed}(\mathbf{X}, 0, 60, 1200, \mathbf{D}) \qquad \mathbf{i} := 0 .. 1200$