「どちらでもよい」三題　～力学編

高橋　善樹　福島県立会津高等学校，965-0831　会津若松市表町 3-1
BXT02731@nifty.com，　http://homepage2.nifty.com/ysc/

物理学の基礎の学習において，ある現象を説明しようとするとき，用いる原理や法則の選び方によって，いくつかの説明が同時に可能である場合がある。初学者にとっては，法則間の関連や理論体系の構造的な把握が十分でないために，複数の説明のうちいずれを選択すべきかで迷う場合も多い。そんな例を集めてみた。

1　作用反作用か運動量保存か

Q. ロケットがガスの噴射によって加速できるのはなぜか？

1. ガスを押し出す力の反作用によって加速する。
2. 運動量保存則によりロケットはガスと逆方向の運動量を得る。

1.1　作用反作用による説明

ガスはロケットから噴出されるときに進行方向と逆向きに力を受ける。したがってロケットはガスからその反作用の力を進行方向に受ける。この力によってロケットは加速される。

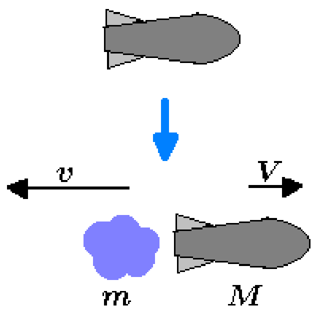
1.2　運動量保存による説明

ガスは進行方向と逆向きの運動量を得る。運動量保存則によってロケットとガスの運動量の和は一定に保たれるから，ロケットは同じ大きさの運動量を進行方向に得ることになる。簡単のため初速度を0として，質量 M のロケットが質量 m のガスを後方に速さ v で噴射して，前方に速さ V を得たとすれば，運動量保存則により

$$0 = MV + m(-v) \tag{1}$$

$$\therefore \quad V = \frac{m}{M}v \tag{2}$$

となる。ただし，簡略化のためガス噴出によるロケットの質量変化は無視した。



1.3　どちらでもよい

ロケットとガスが相互に及ぼしあう力の大きさを F とし，これによって両者が得る加速度の大きさをそれぞれ A，a とすれば，運動方程式によって

$$A = \frac{F}{M}, \qquad a = \frac{F}{m} \tag{3}$$

となる。ゆえに噴射時間を t とすれば，

$$V = At = \frac{Ft}{M}, \qquad v = at = \frac{Ft}{m} \tag{4}$$

であるから，後の式から得られる $Ft = mv$ を前の式に代入して (2) を得る。

すぐに気づくように，$Ft = mv$ は力積と運動量の関係にほかならず，これは運動方程式と等価である。すなわち，運動の第二法則を前提として作用反作用の法則と運動量保存則は等価であることが理解

されれば，両者による説明のどちらでもよいことは当たり前であるといえる。以下に，一般化して整理しておく。簡単のため二体問題に限定するが，多体問題でも同様であることはいうまでもない。

質点 1 が質点 2 から力 $\boldsymbol{F}_{12}$ を受けるとき，質点 2 は質点 1 から

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$$

なる力を受ける（作用反作用の法則）。

質点 1 の質量を m_1，速度を $\boldsymbol{v}_1$ などとおけば運動方程式によって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} &= m_1\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2) = 0\end{aligned}$$

$\therefore \quad m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = const.$（運動量保存則）

2　仕事か力積か

Q. ストローにマッチ棒を入れ吹き矢として遊ぶとき，ストローが長い方がマッチ棒が遠くまでとぶのはなぜか？

1. 力を受ける距離が長く，なされる仕事が大きいから。
2. 力を受ける時間が長く，及ぼされる力積が大きいから。

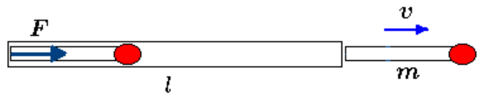
2.1　仕事による説明

簡単のためマッチ棒がストロー内で受ける力 F は一定であるとする。ストローの長さ l，マッチ棒の質量 m，ストローの先から飛び出す速さを v とすると，エネルギー原理「運動エネルギーの変化＝なされた仕事」から，

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fl \tag{5}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{2Fl}{m}} \quad \propto \sqrt{l} \tag{6}$$

となる。同じ高さからの水平投射であれば，水平到達距離は初速に比例し，すなわちストローの長さの平方根に比例する。



2.2　力積による説明

同様におき，また，マッチ棒がストローを通過する時間を t とすれば,「運動量の変化＝与えられた力積」から，

$$mv = Ft \tag{7}$$

$$\therefore \quad v = \frac{Ft}{m} \quad \propto t \tag{8}$$

となる。ストローが長ければ通過時間 t も長くなり，それに比例して水平到達距離も大きくなる。

2.3　どちらでもよい

ストロー内でのマッチ棒の加速度 a は，運動方程式から

$$a = \frac{F}{m} \tag{9}$$

であるから，

$$l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \tag{10}$$

となり，これを (5) に代入すれば (7) を得る。

両者の等価性は，エネルギー原理が運動方程式を変位で積分したものであり，また運動量と力積の関係は運動方程式を時間で積分したものであるという法則間の関連がわかっていれば，容易に気づくことである。積分の実行を以下に示すが，積分範囲は省略してある。

運動方程式　$\boldsymbol{F} = m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$

仕事

$$\begin{aligned} & \int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} \\ =& \int m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot d\boldsymbol{x} \\ =& \int m\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot d\boldsymbol{v} \\ =& \int m\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} \\ =& \left[\frac{1}{2}mv^2\right] \end{aligned}$$

力積

$$\begin{aligned} & \int \boldsymbol{F}dt \\ =& \int m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dt \\ =& \int m d\boldsymbol{v} \\ =& [m\boldsymbol{v}] \end{aligned}$$

3　エネルギーか角運動量か

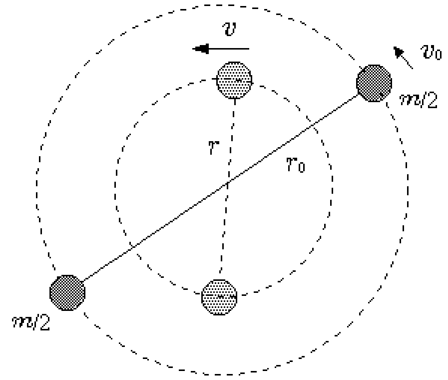
Q. スケートのスピンにおいて，うでを縮めるにしたがって回転が速くなるのはなぜか？

1. うでを縮める仕事をした分，回転の運動エネルギーが増加するから。
2. うでを縮めるとき角運動量が保存されるから，速さは増加する。

3.1　エネルギーによる説明

遠心力に抗してうでを縮めるには力が必要である。すなわちうでを縮めることにより自分自身に対して仕事をすることになる。その結果エネルギー原理によってなされた仕事の分運動エネルギーが増加する。これが回転の速さを増す理由である。

問題を単純化するため，棒につながれた質量 $m/2$ の 2 質点が中心のまわりに回転している場合について考察してみる。はじめ回転半径 r_0，速さ v_0 だった状態から回転半径 r，速さ v の状態に移行したとする。



質点になされる仕事は，

$$W = -\int_{r_0}^{r} \frac{mv^2}{r}dr \tag{11}$$

となる。負号は半径が減少する向きへの積分であることによる。しかし，ここで $v = v(r)$ の関数形がわからないと積分は実行できない。かといって直接角運動量保存を用いたのではルール違反であろう。そこで，運動エネルギー $K = mv^2/2$ を用いて，次のようにする。

$$dW = dK = -\frac{mv^2}{r}dr = -\frac{2K}{r}dr$$

$$\therefore\quad \frac{dK}{K} = -\frac{2dr}{r}$$

積分を実行して，

$$\frac{K}{K_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

すなわち

$$\frac{v}{v_0} = \frac{r_0}{r}$$

これで目標の関数形 $v = r_0v_0/r$ がみつかった。しかし，いうまでもなくこれは角運動量保存を導出したということである。

ずいぶん遠まわしの計算になるが，とりあえず (11) の積分を実行してみよう。

$$\begin{aligned} W &= -mr_0^2v_0^2\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^3} \\ &= -mr_0^2v_0^2\left[-\frac{1}{2r^2}\right]_{r_0}^{r} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned} \tag{12}$$

なされた仕事の分だけ運動エネルギーが増加することが示された。しかし，途中で用いた $dW = dK$ が (12) の結果そのものであるから，以上の計算は教育上の意味以外には何ら理論上の意義をもたないといえよう。

3.2　角運動量による説明

エネルギーによる定量的な説明が結局のところ角運動量保存を使わざるを得なかったことから，直接角運動量保存則を用いた説明は簡単にすむことがわかる。実際うでを縮めるときに質点が受ける力は中心力であるため，角運動量保存

$$mr_0v_0 = mrv$$

が成り立つ。すなわち回転半径と速さが反比例することになるから，このままで十分な説明になっているといえるだろう。

3.3　どちらでもよい

エネルギー原理の成立を確認した（？）前述の計算から，どちらでもよいことはすでに確認されたといえるが，以下に理論的な構造がよりはっきりするように整理しておく。

エネルギー原理が運動方程式を変位で積分したものであることを前節で示したから，角運動量保存則と運動方程式との関連を示せば十分であろう。

平面極座標 (r, φ) において動径方向および円周方向の加速度成分は，

$$\left\{\begin{array}{l} a_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ a_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\varphi}{dt}\right) \end{array}\right.$$

とかける。これは，$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ を微分してベクトルの座標変換を用いれば得られる。

ここで外力および速度の極座標成分を

$$\boldsymbol{F} = (F_r, F_\varphi) = (ma_r, ma_\varphi)$$

$$\boldsymbol{v} = (v_r, v_\varphi)$$

とおけば，運動方程式は

$$\left\{\begin{array}{l} m\dfrac{dv_r}{dt} = F_r + \dfrac{mv_\varphi^2}{r} \\ \dfrac{d}{dt}(mrv_\varphi) = rF_\varphi \end{array}\right.$$

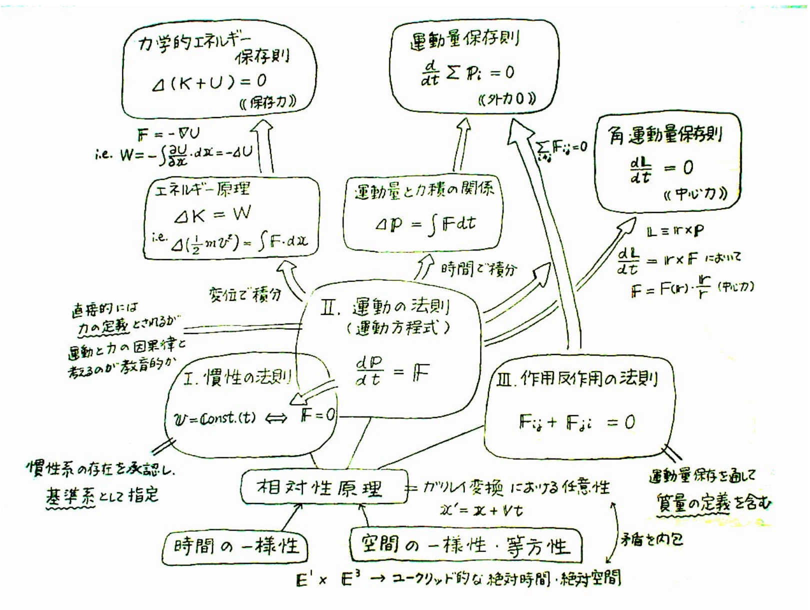
となる。ただし，$v_\varphi = r\dot{\varphi}$ を用いた。

中心力においては $F_\varphi = 0$ であるから，このとき第 2 式は角運動量保存則そのものとなる。

ニュートン力学の理論構造に関するメモ　(1997.06.13 より改訂)

―― 運動の法則の意義からとらえなおす ――

参考 :「相対性理論」小玉英雄著，物理学基礎シリーズ 6（培風館）



（2003.11.01）