

# コマの歳差運動の理解について

高橋 善樹

福島県立会津高等学校, 965-0831 会津若松市表町 3-1

BXT02731@nifty.com, <http://homepage2.nifty.com/ysc/>

ジャイロ効果の代表的な例として、コマの回転軸が鉛直軸に対して傾いて回転する歳差運動があげられる。コマの自転の角運動量を  $\mathbf{L}$ , 自転軸に対して与えられたトルクを  $\mathbf{N}$  とおくと、運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}$$

と書ける。ただし、コマの自転角速度を  $\omega$  とするとき  $\boldsymbol{\Omega} \ll \omega$  である。この  $\boldsymbol{\Omega}$  について、ネットを通じて知り合った物理の入門者 H 氏から質問をいただいた。力学のテキストによって、 $\boldsymbol{\Omega}$  のベクトルをコマの自転軸に対して（したがって  $\mathbf{L}$  に対して）垂直に描いたものと鉛直上方に描いたものの両方みられるが、どう解釈したらよいかというものであった（図の  $\boldsymbol{\Omega}$  と  $\boldsymbol{\Omega}'$ ）。私自身今まで気にとめないで読み流していたが、たとえばファインマンのテキストには両方の  $\boldsymbol{\Omega}$  が出てくる。当然これらは別のベクトルを表しているから、以後は図のように前者を  $\boldsymbol{\Omega}$ , 後者を  $\boldsymbol{\Omega}'$  として区別しよう。

さて、前述の運動方程式に現れるのは通常  $\boldsymbol{\Omega}$  である。これは、

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

と定義され、 $\theta$  はコマの自転軸そのものの歳差運動による回転角（右ねじの規則で方向を定めたベクトルとする）だからである。すると、鉛直軸まわりの歳差運動の角速度である  $\boldsymbol{\Omega}'$  はこれとどういう関係にあるのか？ 図の  $\theta'$  を使えば、

$$\boldsymbol{\Omega}' \equiv \frac{d\theta'}{dt}$$

であるから、

$$\Delta L = L \Delta\theta = L \sin \phi \cdot \Delta\theta'$$

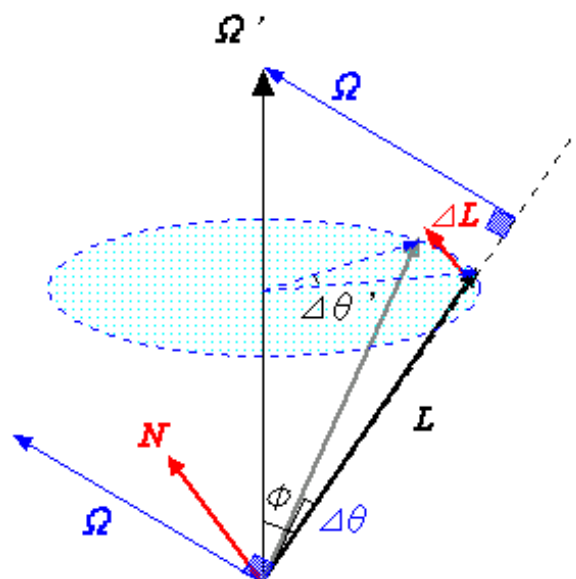
すなわち

$$L \boldsymbol{\Omega} = L \sin \phi \cdot \boldsymbol{\Omega}'$$

の関係にある。ここに  $\phi$  は自転軸の鉛直軸からの傾き角である。したがってベクトル積の定義によって、

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{L}$$

となり、はじめに与えた運動方程式に現れる  $\boldsymbol{\Omega}$  は結果的にはどちらでもよいということになるのである。



図：コマの歳差運動における各ベクトルの関係

( $\mathbf{N}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{L}$  は互いに直交し、いずれも角速度  $\boldsymbol{\Omega}'$  で回転していく)

## 参考文献

- [1] ファインマン, レイトン, サンズ：  
「ファインマン物理学 I 力学」,  
坪井忠二訳（岩波書店）

(2005.08.03)