

振動の一般論とエネルギーの関数としての周期

喜多方工業高校 高橋 善樹

1. 1次元振動の一般論

静的な外場の中にある自由度が1の系のエネルギー保存は、一般座標を q として、

$$\frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 + U(q) = E$$

と書ける。ここに $a(q)$ は、 q のある関数であり、デカルト座標 x では質量 m , 極座標 q では慣性モーメント I となる。とりあえず a が q によらない場合のみ考えるとして、変形すると、

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{a}(E - U(q))}$$

となり、積分をとって、

$$t = \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{E - U(q)}} dq + \text{const}$$

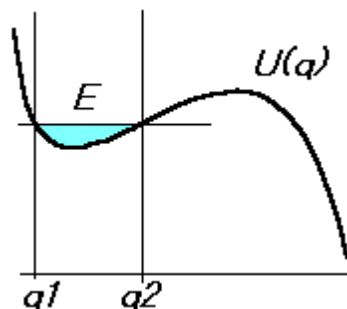
運動は、 $U(q) \leq E$ を満たす領域で行われ、その領域が $[q_1, q_2]$ に限られる場合には、周期的な運動すなわち振動が起こる。このようなとき、その周期は q_1, q_2 間を動く時間の2倍に等しく、

$$T(E) = \sqrt{2a} \cdot \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{\sqrt{E - U(q)}} dq$$

である。運動の境界 q_1, q_2 は、方程式

$$U(q) = E$$

の解として与えられる。



2. 簡単な振動における例

$$a := 1 \quad \omega := 1 \quad q_0 := 1$$

(1) 単振動一般

$$a := a \quad \omega := \omega \quad q_0 := q_0$$

一般の単振動においては、

$$E := \frac{1}{2} \cdot a \cdot \omega^2 \cdot q_0^2 \quad U(q) := \frac{1}{2} \cdot a \cdot \omega^2 \cdot q^2$$

であるから周期の計算を実行すれば、

$$\begin{aligned} T(E) &:= 2\sqrt{2a} \cdot \int_0^{q_0} \frac{1}{\sqrt{E - U(q)}} dq & T(E) \text{ simplify } &\rightarrow 2 \cdot a^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{(\ln(-a) - \ln(a))}{(-a \cdot \omega^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \\ &= \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \end{aligned}$$

$$\because \ln(-1) \rightarrow i \cdot \pi$$

となり、よく知られた単振動の周期の式を得る。

(2) 単振り子

$$\begin{aligned} g &:= 1 & \theta &:= 1 & \theta_0 &:= 1 & l &:= 1 & m &:= 1 \\ g &:= g & \theta &:= \theta & \theta_0 &:= \theta_0 & l &:= l & m &:= m \end{aligned}$$

長さ l の単振り子においては, 最大ふれ角を θ_0 として

$$\begin{aligned} a &= m \cdot l^2 & E &= -m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta_0) \\ U(\theta) &= -m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

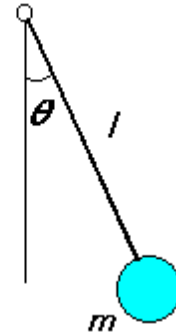
となるが微小振動の近似では,

$$E - U(\theta) \sim \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot l \cdot (\theta_0^2 - \theta^2)$$

したがって,

$$\begin{aligned} T &:= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} d\theta & T &\rightarrow 2 \cdot \left(\frac{l}{g}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \pi \\ & & &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

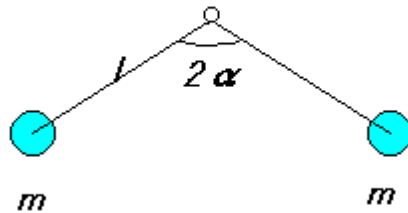
となる。



(3) やじろべえ振り子

右図のようなやじろべえ形の振り子を考える。
ふれ角は上と同様に $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ とすると,

$$\begin{aligned} a &:= 2m \cdot l^2 \\ E &= -m \cdot g \cdot l \cdot (\cos(\alpha + \theta_0) + \cos(\alpha - \theta_0)) \\ &= -2m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta_0) \end{aligned}$$



微小振動の近似をとり, エネルギーの原点をずらして

定数を除けば,

$$E := m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\alpha) \cdot \theta_0^2 \quad U(\theta) := m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\alpha) \cdot \theta^2$$

$$\alpha := 1 \quad \alpha := \alpha$$

$$\begin{aligned} T(E) &:= 2\sqrt{2a} \cdot \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{E - U(\theta)}} d\theta \\ T(E) \text{ simplify} &\rightarrow 2 \cdot (m \cdot l^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{(\ln(-1) - \ln(1))}{(-m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\alpha))^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \end{aligned}$$

結局,
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cdot \cos(\alpha)}}$$

すなわち, 長さが $\frac{l}{\cos(\alpha)}$ の単振り子と同等となる。

<参考文献> 「ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学」(東京図書)

