重ね合せの妙

高橋　善樹　福島県立会津高等学校，965-0831　会津若松市表町 3-1
BXT02731@nifty.com，　http://homepage2.nifty.com/ysc/

1　物理量と重ね合せ

力学および電磁気学をはじめ，物理学の多くの分野において「重ね合せ」という概念と方法が使われる。これはスカラー量においては，それが単純に足すことのできる量であるということ。また，ベクトル量においては，その量をベクトルとして表現できるということのうちに，すでに重ね合せ＝ベクトルとしての足し算が可能であることを前提として含んでいる。

電場に関するガウスの法則は，微分形で

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

と表されるが，これは

電場（ベクトル場）は，電荷（スカラー量）を源とする

という簡明な関係を表現している。そして，この

場（の発散）＝ 源

という両辺のそれぞれの重ね合せ可能性が，基本法則としての高い普遍性を保証しているともいえる。電場と電荷の重ね合せについては，このあと具体例をあげてその「妙」にふれることにしたい。

重力場についてもまた，ガウスの法則が得られ，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{g} = 4\pi G\rho \tag{2}$$

となるべきことは類推を用いて容易に導出される。ここに $\boldsymbol{g}$ は重力加速度ベクトル，G は万有引力定数，ρ は質量密度である。しかし，重力のもととなる質量を足したり引いたりすることは，仮想上の問題としてはおもしろいが，応用としては宇宙レベルの現象解析に限られる。その点，電磁場は身近に重ね合せを実現でき，さらに質量と違って電荷に正負のあることが，応用のバリエーションを豊かにしている。

余談だが，一般相対性理論の集約的な帰結であるアインシュタインの重力場の方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa^2 T^{\mu\nu} \tag{3}$$

は，物理量としてテンソルをとっているが構造的にはガウスの法則に一致しており，簡単にいえば

時空の曲率は，質量を源とする

という内容を表現している。また，弱い場の近似において，(3) の $\mu = \nu = 0$ の成分は，(2) に一致することが示される。[1]

2　平行板コンデンサーの電場

重ね合せの妙を示す簡単な具体例として，平行板コンデンサーの電荷と電場について考察してみる。まず，極板の厚さを無視した簡便な重ね合せを論じよう。

孤立した１枚の金属平板が一様な電荷面密度 σ に帯電しているとすると，縁の効果を無視した十分実用に耐える近似において，平板の上下法線方向に

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{4}$$

の電場を生じる。これは，ガウスの法則の最も簡単な応用問題である（図１）。

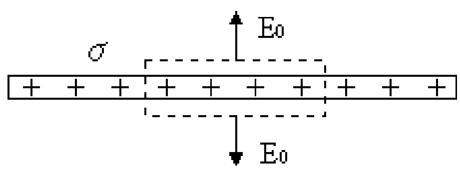

図１　孤立した帯電平板がつくる電場

もう１枚の平板を同様に $-\sigma$ に帯電させ，両者を間隔をおいて配置し，平行板コンデンサーをつくる。これは現実的には，単に極板間に直流電圧を加えた状態に相当する。この系がつくる電場は，両極板が

孤立状態でつくる電場の重ね合せとして記述できるので，極板外では 0，極板間で

$$E = 2E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

となる。重ね合せの後の合成電場 E は，それが極板間にのみ存在するという前提のもとで，そのままガウスの法則を満たしている。また，前提としたコンデンサーの上下の電場が 0 となることは，両極板を含む柱状閉曲面にガウスの法則を適用すれば，内部に含まれる電荷が打ち消しあうことからも説明できる（図２）。

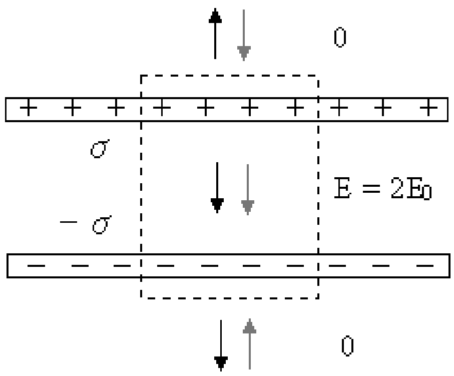

図２ 平行板コンデンサーがつくる電場

以上は，極板の厚さを無視し，したがって内部の電荷移動を捨象した議論であるが，ガウスの法則の有用性と電場の重ね合せを語るのに適した，教育的な展開といえる。[2]

3　誘導電荷分布の重ね合せ

次に，電荷の重ね合せの拡張的な意味をさらに示すために，極板の厚さを無視せず，したがって静電誘導による電荷分布の変化を考慮した議論を展開してみよう。

まず，前と同様に孤立した帯電金属平板について考える。内部の電荷分布は相互の反発により，平板の両表面に均等に配分されるとしてよいだろう。この配分された表面電荷密度を前節との整合を考慮して $\sigma/2$ とおく。ここで，金属内部の電場が 0 であることをアプリオリに認め，したがって表面電荷から内部へ向かう電気力線はないことを前提として，片面のみの電荷を包む閉曲面にガウスの法則を適用した結果として，(4) を与える立場もある。[3] しかし，金属内部にガウスの法則適用の制限をつけず，両面の電荷がつくる電場をすなおに重ね合せれば，内部で 0，外部で (4) になることは自明である（図３）。

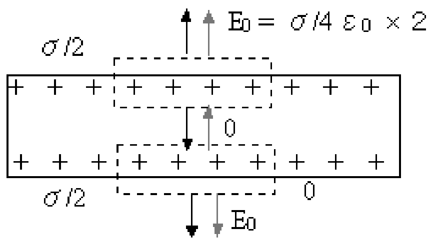

図３ 表面電荷の配分と電場

次に，外部電場 E_0 が垂直に与えられているとき，正味の電荷をもたない金属平板内に生じる静電誘導を考える。両面に誘導される表面電荷密度は，それらが金属内部につくる電場が，外から加えられた電場をちょうど打ち消すと考えてよいから，$\pm\sigma/2$ に等しい。もちろん，これらの表面電荷が外部につくる電場はあわせて 0 である（図４）。

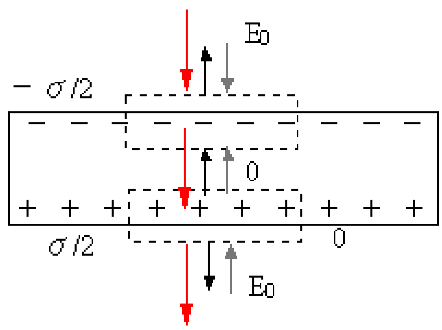

図４ 外部電場による静電誘導

さあ，これで準備が整った。以上の２つの状態を重ね合わせるとどうなるだろうか。表面電荷の方は，一方が打ち消しあって 0，他方は電荷密度が 2 倍になって，σ となる。また，合成電場の方は $E = 2E_0$ となる。後半に導入した外部電場が負の極板によってつくられたものとすれば，平行板コンデンサーのできあがりである。負の極板内の電荷分布も同様に考察できるであろう。重ね合せの結論として，極板の表面電荷は内側のみに存在すること，電場が極板間のみで $2E_0$ となることが導かれた（図５）。

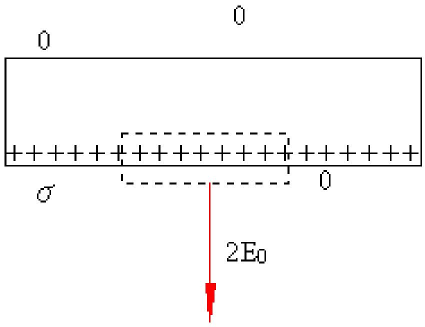

図５ 重ね合せの結果

4　電場における重ね合せ

静電場における重ね合せの有効性は，ここで例をあげたように正負の電荷分布を自由に付加あるいは差し引いて，より単純な電荷分布にわけることによって，目的とする結果に無難に到達する方法がみつかる場合が多いことにある。電荷の特殊性から，単に電荷を物体ごとに足し引きできるだけでなく，同一物体の複数状態を重ね合せることが気兼ねなくできることは，静電場の問題を分析的に調べる上で，大変強力な手段を提供するものである。また，電気映像法のように導体表面の境界値問題を，仮想上の映像電荷を重ね合せることで自動的に解決するという手法も，静電場ならではの重ね合せの興味深いオプションである。[4]

参考文献

[1] 藤井保憲：「時空と重力」
（産業図書，物理学の廻廊，1979）

[2] R.P. ファインマン：
「ファインマン物理学 III 電磁気学」
（宮島龍興訳，岩波書店，1969）

[3] 竹内　淳：
「高校数学でわかるマクスウェル方程式」
（講談社，ブルーバックス，2002）

[4] V.D. バーガー／M.G. オルソン：
「電磁気学 [新しい視点にたって] Ｉ」
（小林／土佐訳，培風館，1991）

（2003.01.23）