

力のモーメントに関する一考察

高橋 善樹

福島県立会津高等学校, 965-0831 会津若松市表町 3-1

BXT02731@nifty.com, <http://homepage2.nifty.com/ysc/>

1 高校物理における力のモーメント

学習指導要領によって学習内容の枠組みが提示されるようになって以来, 高校物理の力学分野において, 「力のモーメント」は一時期をのぞいて力学の学習内容の一テーマとして扱われてきた。その一時期とは, 今年より施行されたものの二つ前の学習指導要領が実施されていた時期である。「理科 I」が必修科目であった当時の「物理」においては, 剛体のつりあいを扱わないこととされ, 必然的に力のモーメントは姿を消した。そして, 前の学習指導要領で復活するに至ったのである。

新指導要領では「力の合成・分解, 力のつりあい, 摩擦力, 弾性力にも簡単に触れる」こととされ, 剛体のつりあいや力のモーメントの表現こそないが, 教科書にはしっかり残されている。ただ, 平行な 2 力の合成についての操作 (後述) を省くなどの簡略化が見られる。

「てこの原理」は歴史上も紀元前という早くから現れているように, 静力学の初歩であるから, 小学校理科に定着していることは当然として, その発展である力のモーメントを高校において扱うのも力学の学習においては自然の流れであると思われる。

2 力学史における力のモーメント

力のモーメントの発祥は, いうまでもなくアルキメデス (B.C.287~212) の「てこの原理」までさかのぼることができる。もちろんてこのものはアルキメデス以前にも道具として使われており, 文献にも記述が残されているが, その原理を明確に定量化したのはアルキメデスが最初であろう。

力のモーメントはてこの原理において定量化された「つりあい量」の一般化された概念であるといえるが, その重要性に着目した一人がレオナルド・ダ・

ビンチ (1425~1519) であるといわれる。図 1 のように A のまわりに回転できる軽い棒 AB があり, B においておもりに通じる糸によって水平・鉛直の 2 方向に引かれてつりあっているとき, 彼は現代風に表現すれば力 F_1 , F_2 に対するこの実質的な長さが l_1 , l_2 であることを述べている。この認識は, 図からすぐにわかるように, 直交する 2 力という限定はあるものの力の平行四辺形の法則に到達する一歩手前であったといえる。

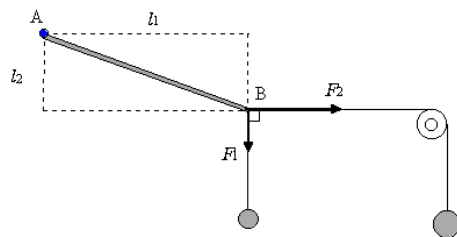


図 1 レオナルド・ダ・ビンチの考察

さらに, ガリレオ・ガリレイ (1564~1642) は, ダ・ビンチの考察を発展させて, 図 2 のようなめらかな斜面上の物体のつりあいを, その物体がつながれた A のまわりに回転できる軽い棒 AB のつりあいに置き換え, 斜面の原理をてこの原理によって説明している。これもまた, 平行四辺形の法則への限りのない接近がうかがわれる。

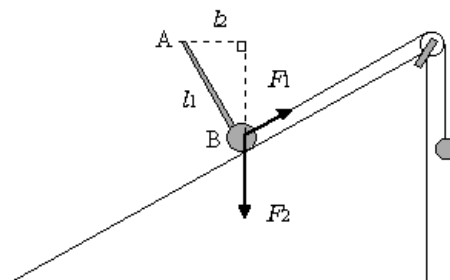


図 2 ガリレオ・ガリレイの考察

一方、ステビン（1548～1620）は、なめらかな斜面上の物体のつりあいに対する考察に端を発して、力の平行四辺形の法則を実質的に見出すにいたった（図3）。ステビンの方法はてこの原理を直接用いずに、斜面上の平衡を独立に論じた点で独創的であるが、ガリレオの考察にあきらかなように、てこの原理と斜面の原理は基本的に等価であると考えることができる。したがってまた、力のモーメントの概念は、力の平行四辺形の法則と等価であるといえる。

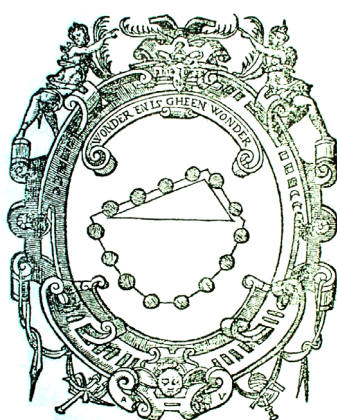


図3 ステビンの論文の扉絵

「不思議にして不思議にあらず」とある

力のモーメントの概念は、その後ホイヘンス（1629～1695）の回転に対する動力学の考察などを経て最終的に完成するに至った。

3 力のモーメントと平行四辺形の法則

前述のように、剛体のつりあいにおける力のモーメントの概念は、平行四辺形の法則すなわち力のベクトルとしての合成・分解の法則と等価である。したがって、その基礎にあるてこの原理は、図4のように平行な2力の合成を考えれば直接平行四辺形の法則によって導くことができる。平行な2力に直交する逆向きに等しい力 f を加えるというこの操作は、旧課程「物理 IB」の教科書にも見られるが、新課程「物理 I」の教科書では、「簡単に触れる」という制約のためか、省かれている。

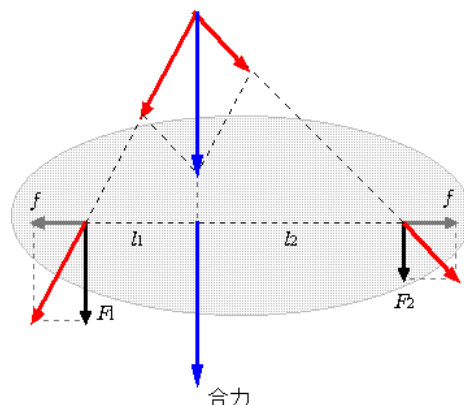


図4 剛体を受ける平行な2力の合成

上のようなてこの原理の「導出」は、直感的で自明なダ・ビンチの考察（図1）などに比べてやや操作主義的でまわりくどい感じがする。むろん教科書の扱いはてこの原理の導出としてではなく、剛体を受ける力の合成としての記述であるから、複数の力を合成していけば最終的に一つの合力および一組の偶力が残るとして、剛体のつりあい条件を導く展開の途上としては、必要なものであるといえる。しかし、力の合成からつりあい条件にいたる教科書の展開には、どうしても省略されたことによる論理の飛躍が残る、前述のような操作は合力を求めるマニュアルとしての意味しか残らないというのが教育上の実情であると思う。そうした観点からであるならば、新課程におけるこの「操作」の省略には同意できる部分がある。

概観したところ力のモーメントの概念は、てこや輪軸などの機械におけるつりあい、また仮想仕事の原理にみられるように仕事とエネルギーの概念ともむすびつき、歴史的には早くから静力学におけるつりあい量としての重要性が認識されていたといえるが、物理量としての力のモーメント＝トルクのはっきりした定義と活用は、前述したように回転の動力学の考察によって完成をみたといえる。なぜならば、静力学においては力のモーメントの概念を使わなくとも、力の平行四辺形の法則や仮想仕事の原理で同等の考察が可能だが、回転の動力学においては、力のモーメント＝トルクこそが運動方程式

$$\frac{dL}{dt} = N$$

において右辺をなす一般化された力に相当するからである。

4 力のモーメントの指導の展開

さて、現在の高校物理では回転の動力学は扱わないが、剛体のつりあいにおいて力のモーメントは、平行四辺形の法則に帰することができるとはいえ、それよりも直感的なつりあい量として学ぶ意義を持つ。また、力のつりあいが加速度0の運動方程式に帰するのと同じに、力のモーメントのつりあいは角加速度0の回転の運動方程式に当たるわけであるから、大学で物理を学ぶ生徒にとっては基礎的な準備としての意味もあるわけである。

力のモーメントの指導の効果的な展開は、どうあるべきだろうか。平行四辺形の法則との等価性はさておき、静力学の歴史に学んで「てこの原理」の拡張に徹したいと考える。てこの原理については小学校での既習事項であるから、生徒にとってはほとんどアприオリに認知されているといってよい。そこで、その拡張に徹する指導手順を次のように提案したい。

1. てんびんによる「てこの原理」の再確認
2. てんびんにおける力のモーメントの定義
3. うでの曲がったてんびんへの拡張（図5）
4. 輪軸への拡張と仮想上の「うで」の導入
5. 任意の剛体への拡張

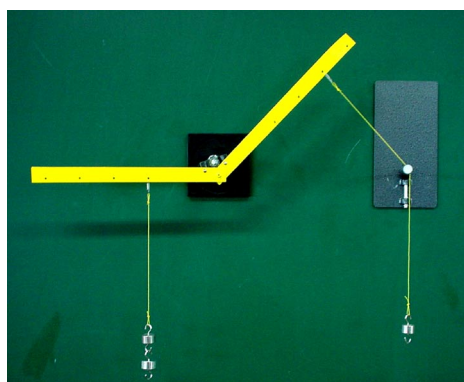


図5 うでの曲がったてんびん（演示教材）

以上の後に剛体のつりあい条件へと導く。また、平行四辺形の法則との等価性や剛体を受ける力の合成、偶力、さらには仮想仕事の原理などが指導事項のオプションとしてあげられる。ただし、仮想仕事の原理はオプションとして採用するのであれば、仕事とエネルギーの単元で扱うのが妥当かもしれない。要は、力の合成→偶力→剛体のつりあい条件というように、無理に平行四辺形の法則による「証明」を

前提としないというのが私の提案である。

数学においては、より基本的な公理に帰して論理を組み立てることが重視されるが、実験こそが検証の場であるとされる物理学においては、たとえ数学的にはより基本的と思われる原理・法則に帰することができたとしても、簡明で基本的な経験から抽出された理論は相応の意義を持っている。てこの原理＝力のモーメントのつりあいの理論も、平行四辺形の法則や仕事の原理に帰することができるとはいえ、教育的には独立の意義をもっており、それらの等価性を説くことは有意であるが、力学の初歩の指導において不可欠のものではないと考える。

少なくとも力のモーメントの概念の指導に当たっては、力学の複線的な発展に学んで、経験則としてのてこの原理を素直に拡張することが効果的なのではないかと思う。

5 てこの原理へのこだわり

前述のように、てこの原理の拡張として力のモーメントを指導するのであれば、「仮想上のうで」という概念（図6-a）がどうしても必要であり、それを曲がったてんびんや輪軸を通じて「現実のうで」から無理なく拡張しようというのが私の提案であった。この流れに沿った指導は、すでに多くの場面で実践されていることと思う。しかし一方で、「現実のうで」に対して垂直な力の成分をかければ事足りるとする展開（図6-b）もある。もちろん両者は全く同値であり、大学レベルではいずれ $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ なる外積（図6-c）によって定義しなおされることとなるわけである。

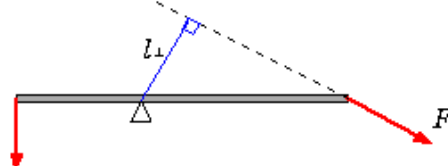


図6-a 「仮想上のうで」×力

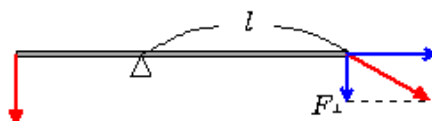


図6-b 「現実のうで」×力の垂直成分

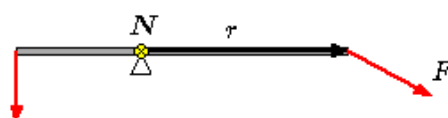


図6-c 作用点の位置ベクトルと力の外積

外積による定義は軸から力の作用点までのベクトルを $\mathbf{r}$ とするのだから、図 6-b により近いといえる。私は、図 6-b をオプションとして指導している。しかし、てこの原理に加えて平行四辺形の法則を併せて用いるという点で、力のモーメントの導入の際にはやや「経済的」でない気がする。

力のモーメントを指導する際にはもちろん、力の合成・分解は既習とされているのが常であるから、図 6-b によってすませることも可能である。その立場からすれば、てこの原理にこだわる図 6-a の考え方は多少遠回りに見えるかもしれない。しかし私は、てこの原理のみによってそれを拡張する方法、すなわち「仮想上のうで」を導入する展開がより素直でフレキシブルであるような気がする。たとえば図 7 のような場合に、作用点までの「現実のうで」をもちこむのは経済的ではないであろう。

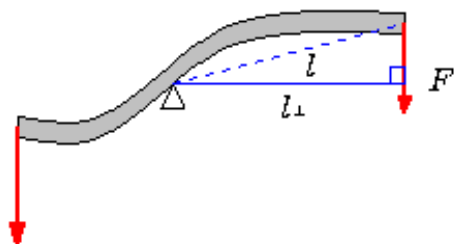


図 7 変形したてんびん

てこの原理のみにこだわり、「仮想上のうで」を導入する展開は、力学史における力のモーメントの概念の発達の流れに一致している。少なくとも高校物理における力のモーメントの展開に関する限り、このような力学史の流れに沿うことが、生徒の認識の素直な順序性に一致しているのではないと思われる。

参考文献

- [1] エルンスト・マッハ：
「マッハ力学—力学の批判的發展史」，
伏見 譲訳（講談社）
- [2] ガリレオ・ガリレイ：
「レ・メカニケ」，
豊田利幸訳
（「世界の名著」21 巻，中央公論社）

（2003.08.08）