

自転による遠心力を考慮した重力ポテンシャル

高橋 善樹 福島県立会津高等学校, 965-0831 会津若松市表町 3-1

BXT02731@nifty.ne.jp, <http://homepage2.nifty.com/ysc/>

地上の重力が、おもに地球の引力と自転による遠心力の合力であることはよく知られている (図 1)。

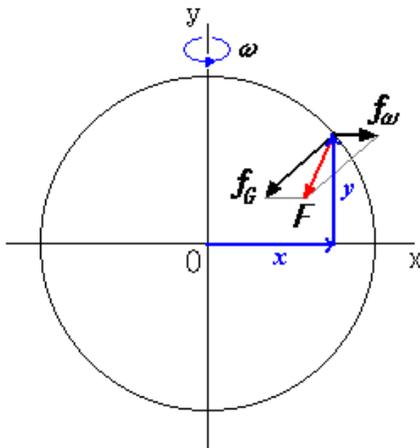


図 1 引力と遠心力の合力

この合力 F は、地球中心を原点とした位置ベクトル $\mathbf{r} = x + y$ の地点にある単位質量について次のようになる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_G + \mathbf{f}_\omega = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \omega^2 \mathbf{x}$$

ただし、 G は万有引力定数、 M は地球の質量、 ω は自転の角速度である。成分に分ければ、

$$F_x = -GM \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \omega^2 x$$

$$F_y = -GM \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

と書ける。したがって遠心力を考慮した重力のポテンシャルは、

$$U = -GM \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{2} \omega^2 x^2$$

となる。

図 2 以下は、数学技術計算ソフト Mathcad によるものである。ただし、遠心力を強調するために自転の角速度を実際の 5 倍にとっている。等重力面が回転軸方向にふくらむのに対して、等ポテンシャル面は遠心方向にふくらむことがわかる。

極とポテンシャルが等しい赤道方向の半径がどれだけになるか計算してみよう。極半径 $r_p = 6,357$ km として、

$$-G \frac{M}{r_p} = -G \frac{M}{x} - \frac{1}{2} \omega^2 x^2$$

の解は $x = 6,368$ km となった。

この値による地球の扁平率は本質的には同じ方法をとったホイヘンスの結果に一致する。

実際の赤道半径 6,378 km がこれより大きいことは考察に値する。内部圧力を考察（密度一様とした）したニュートンの値はより近く、形のひずみによる重力の非中心力項、さらには密度分布を考えると実際に近い値が得られる。

潮汐摩擦による自転のおくれを考慮して太古の自転速度による等ポテンシャル面を現在に保存しているという荒唐無稽な「仮説」（=現在の極と赤道を以上の安易なモデルで等ポテンシャルにする自転周期は 17.3 時間になるが、仮に現在の自転のおくれかたでさかのぼると、これは約 15 億年前の自転周期に等しい。）も考えてみたが、このような大きなタイムスケールでは、流動さえる部分をもつ地球は、もとの形をとどめることは不可能であり、マユツバにもならないだろう。

しかし、決して強くはないが巨大なスケールではたらく力の均衡のもとで、この地球が概して等ポテンシャル面に追隨した形状を保っていること自体、感慨を禁じえない事実といえる。

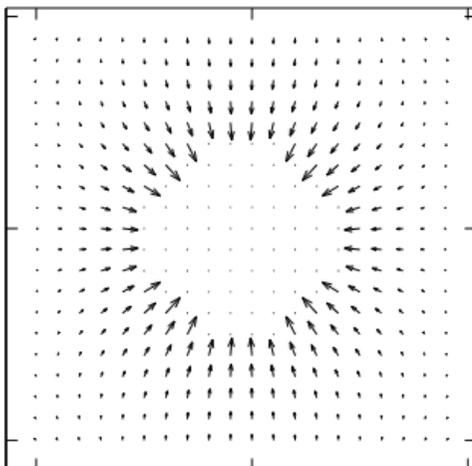


図2 遠心力を考慮した重力場

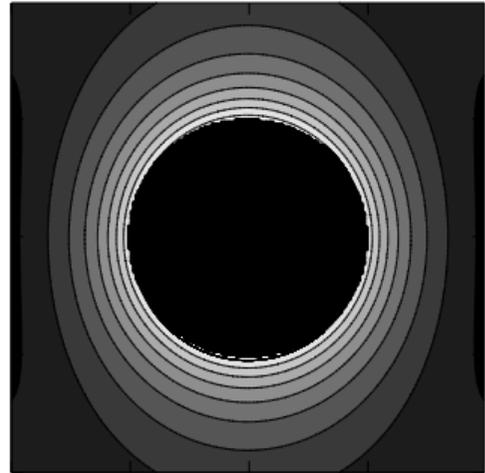


図3 等重力面の形状

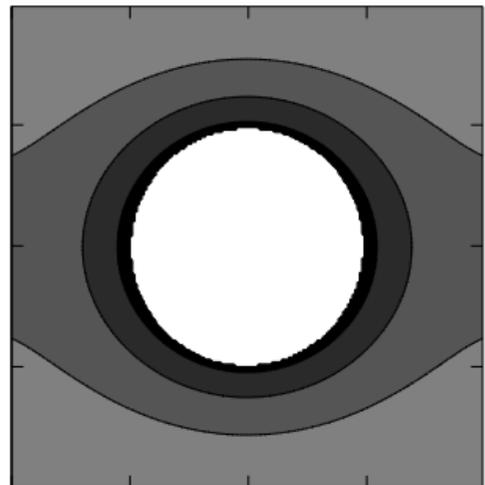


図4 等ポテンシャル面の形状

参考文献

- [1] 「力学 新しい視点にたって」
V.D.Berger and M.G.Olsson ,
戸田盛和・田上由紀子訳
1975（培風館）

（2002.02.18）