

慣性力のポテンシャルに関する覚え書き

高橋 善樹

福島県立会津高等学校, 965-0831 会津若松市表町 3-1

BXT02731@nifty.ne.jp, <http://homepage2.nifty.com/ysc/>

1 遠心力を含む重力ポテンシャル

地球自転にともなう遠心力を考慮した重力のポテンシャルは、半径方向に x , 地軸方向に y 座標をとって

$$\phi = -GM \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \quad (1)$$

とかける。ただし、 G は万有引力定数、 M は地球の質量、 ω は自転の角速度であり、引力は中心からの距離の 2 乗に反比例するとする初歩的なモデルを用いた。

実際、ポテンシャルの定義にしたがって (1) から単位質量あたりの重力の成分を求めれば、次のようになる。

$$F_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -GM \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \omega^2 x \quad (2)$$

$$F_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -GM \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (3)$$

この遠心力を加味した重力ポテンシャルの適用には、加速系における慣性力をポテンシャルで表記した副作用からくる制限がつく。ポテンシャルの基礎にたちかえて、この制限について確認しておこうと思う。

2 保存力とポテンシャルの定義

「一般に、物体をある点 P から他の点 P_0 まで動かすとき、力がする仕事が経路に関係なく、2 点 P , P_0 の位置だけで決まるような場合、その力を保存力という。また、その仕事の量を、点 P_0 を基準点として、物体が点 P にあるときの位置エネルギーという。」^[1]

以上の定義に照らして、一般に加速系における慣性力が保存力とみなし得るか、というのが今与えられた問題である。答えは否である。なぜならば一般にこの慣性力は、物体の速度に依存するからである。

回転によって生じる慣性力のうち速度に依存する部分はコリオリ力と呼ばれるが、この力は物体の速度に対して常に垂直であり、仕事をしない。したがってまた、ポテンシャルを定義し得ないわけである。これは、ローレンツ力がベクトルポテンシャルを用

いることによりはじめて電場のポテンシャルと同等の記述ができるという特殊性をもつことと類似している。

3 中心力場と有効ポテンシャル

前述のように、非慣性系における慣性力一般をポテンシャルで記述することはできない。しかし、系の並進運動についてはもちろんのこと、回転運動を含む場合であっても、慣性力のうち物体の速度に依存しない部分はポテンシャルによる記述が可能であり、したがってまた限定された範囲で、ポテンシャルによる力の均衡や物体の運動を論ずることができるといえる。

たとえば、中心力場における質点の運動では、動径部分を有効ポテンシャル

$$\phi_e(r) = \phi(r) + \frac{L^2}{2r^2} \quad (4)$$

の場における 1 次元運動とみなせる。ここに $\phi(r)$ は中心力のポテンシャルであり、 L は保存されるべき単位質量あたりの角運動量を表す。(4) の第 2 項は力の中心を含む平面運動に限られることと符号が異なることをのぞいて (1) のそれに対応し、遠心力のポテンシャルにほかならない。^[2]

さらに一定の角速度を持つ回転座標系においては、静止物体が受ける力の静的な均衡を論ずる限りでは、遠心力のポテンシャルの導入で事足りるであろう。等ポテンシャル面としての地球の形状を初歩的に論ずるような場合がその例である。

適用限界をこえた運動については、コリオリ力やエトベッシュ効果（地球表面を東西に運動する実験室内で重力が変化する現象）^[3] など興味深い現象があるが、これについては別の機会にゆずりたい。

参考文献

[1] 「改訂版高等学校物理 B」(数研, 1997)

[2] ランダウ=リフシッツ:「力学」
(広重・水戸訳 東京図書, 1976)

[3] 坪井忠二:「重力」(岩波, 1944)

(2002.05.07)