らくがきぶつり

相対論入門セミナー

2006 年 12 月 1 日　第 2 版

著　者　　高橋善樹

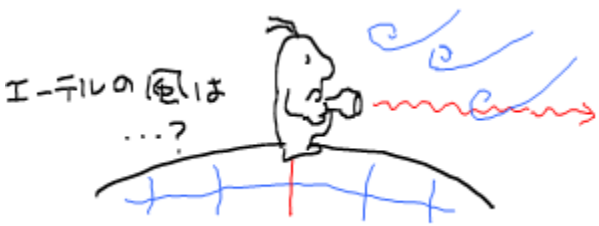
非売品

Copyright© 2006 YOSHIKI TAKAHASHI

らくがきぶつり

相対論入門セミナー

高 橋 善 樹 著



らくがきぶつり

相対論入門セミナー

特殊相対性理論の入門的内容は，数学的には高校卒業レベルで十分です。高校生にもがんばれば何とか理解でき，かつ簡明な相対論テキストのミニマムをめざしました。説明不足でわかりにくいところもたくさんあると思いますが，ぜひ仲間どうしの討論を深めて相対性理論の美しさを味わってください。

2006 年 12 月 1 日　高 橋 善 樹

Scene1　相対性原理　1
Scene2　光速不変の原理　4
Scene3　時間のおくれ　6
Scene4　ローレンツ短縮　8
Scene5　同時の相対性　10
Scene6　時空のダイヤグラム　12
Scene7　ローレンツ変換　15
Scene8　速度の合成　18
Scene9　運動量と質量　20
Scene10　エネルギーと質量　23

次の内容は数学的にやや高度になります。補講的に取り出しましたので，挑戦してみてください。

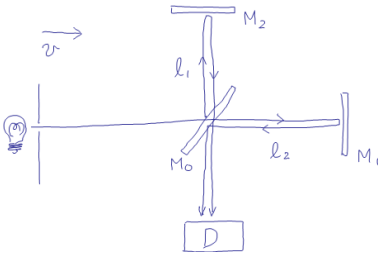
SceneX　時空の幾何学と４元ベクトル　26

Scene 2　光速不変の原理

相対性原理が すべての物理現象について例外なく成り立つとするならば，光の速さについてもすべての慣性系（等速度系）において一定であると考えるべきであり，これを光速不変の原理という。

光が電磁波と総称される波であることが確認されて以来，科学者たちはその媒質として「エーテル」と呼ばれるものの存在を仮定した。そして，宇宙空間においてエーテルが「静止」しているものならば，その中を動いている地球上ではいわばエーテルの風が吹いており，エーテルに対して一定の速さをもつべき光は，地上で方向によって速さを変えることになるだろうと考えた。空気中を伝わる音波は，風が吹いていれば風下に向かう場合に風速の分だけ速くなり，風上に向かうときはその分遅くなるというのと同じである。

このような方向による光速の差を検出して，エーテル中の地球の速度を見出そうとしたのが，マイケルソン - モーレイの実験である。



マイケルソン - モーレイの実験装置の概略は図のようなものである。M_0 は半透明の鏡，M_1，M_2 は鏡である。光源から出た光のうち，

経路　：$M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow D$

経路　：$M_0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_0 \longrightarrow D$

という 2 つの経路をたどったものが，その経路差に応じた干渉をおこす。

装置全体がエーテルに対して右に速度 $\vec{v}$ で動いているとすると，すぐにわかるように l_1，l_2 部分の往復経路は $2l_1$，$2l_2$ からずれを生じる。この状態で干渉を観測した後，装置全体を 90 °回転させれば経路のずれ方が逆転するから干渉光に変化が見られるはずだ。

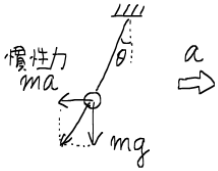
マイケルソン - モーレイの実験は，少なくとも公転による地球の速度を

Scene 1　相対性原理

問題　近未来のこと，リニアモーターカーが実用化し，振動や騒音もなく静かな超高速移動が可能になった。さて，窓のない寝台車で読書をしながらパリまでの一昼夜の旅を楽しんでいる君だが，ところで，列車が今どんな速さで日本海横断トンネルの中を突っ走っているのか知る方法はあるだろうか？

車輪のないリニアモーターカーといえども，地面に対する速さを直接測定する方法はいろいろあり，運転席にスピードメータをつけることは可能だろう。しかし，閉ざされた室内で自分の速さを知る方法はないというのが物理学の結論である。加速度は慣性力によって測定できるから，進行方向がわかっていて出発時からのデータがあれば，それを積分することで速度を得ることができる。

$$\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t)dt$$

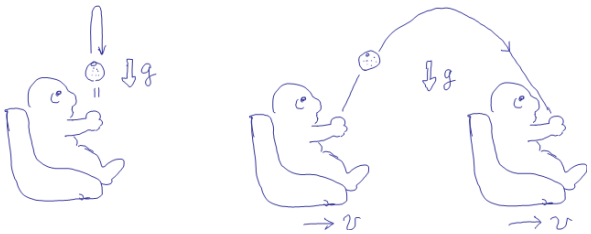


簡易加速度計（$a = g\tan\theta$）

加速度のデータなしに，たとえばうたた寝をしてふと目覚めた君が現在の自分の速度を知ることは，どんな装置をもってしても不可能なのだ。これが，相対性原理と呼ばれる物理学上最も基本的な原理のひとつである。

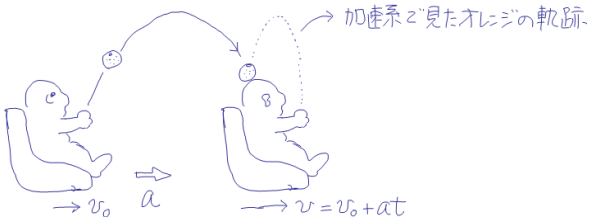
「等速度運動している実験室内で起こるいかなる自然現象も，
静止している実験室内と何ら変わることがない」

たとえば，眠け覚ましに取り出したオレンジを真上に放り投げてみよう。鉛直下向きの一様な重力のもとにある静止系…静止した実験室に固定された座標系というか，モノサシと時計がそなえられてその中での物体の運動が測定可能な実験「時空間」をこう呼ぼう…において上方に投げられた物体は，下向きに一定の加速度（重力加速度 $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$）で鉛直方向に往復運動をする。



実験室が一定の速度で運動している場合（等速度系）も，オレンジの運動は静止系のときと変わることはない。ただし，外のホームに立っている人の立場（静止系）から見れば，オレンジは列車とともに前方に動いていくので放物線を描くことになる。列車が 960km/h の最高速度に達していても，後ろにすわった人にオレンジバクダンをあびせるという迷惑をかけることはないのだ。

もちろん，列車が加速度をもって運動していれば（加速系）事情は異なる。ただ，そのときも君が知ることのできる情報はただひとつ，速度ではなく加速度なのだ。

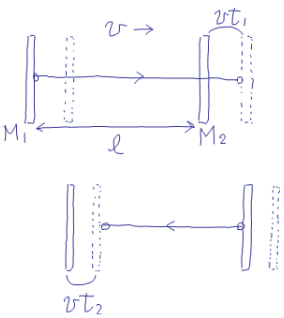


結論として，私たちは静止系と等速度系を見分ける方法を原理的に持たないということになる。実際「静止系」といっているのは便宜的なもので，地球の自転や公転を考えれば静止系など存在し得ない。ただ，ふつうに運動の法則が成り立つ…という意味でこれらを統一して慣性系と呼んで加速系と区別することにする。

練習問題 1　リニアモーターカーが一定の加速度をもって運動しているとき，車内（加速系）におけるオレンジの軌跡を求めよ。

Scene 4　ローレンツ短縮

問題　こんどは，光時計の方向を 90 °回転させて，光の往復方向を速度 $\vec{v}$ の方向に一致させた場合に，光時計が刻む時間と光が進む距離の関係を考察してみよう。



あとの必要のため，M_1，M_2 間の距離を（l_0 ではなく）l としておく。

往路の所要時間 t_1 に対して，

$$ct_1 = l + vt_1 \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{l}{c-v}$$

復路の所要時間 t_2 に対して，

$$ct_2 = l - vt_2 \qquad \therefore \quad t_2 = \frac{l}{c+v}$$

だから往復の合計時間は，

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2cl}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \times \frac{1}{1-\beta^2} \quad , \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

となる。しかし，ともに動く系で見た時計の刻み $t_0 = 2l_0/c$ に比べて，静止系から見たそれは

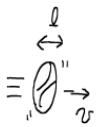
$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

というおくれを生じるのだった。以上のつじつまを合わせるためには，

$$\frac{2l_0}{c} \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2l}{c} \times \frac{1}{1-\beta^2}$$

すなわち，

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



or

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} < l_0$$

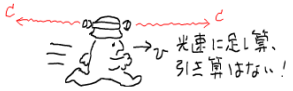
とする以外にない。つまり，光時計の長さがともに動く系で見た長さ l_0

検出するのに十分な精度をもって行われたが，結果は否定的であった。つまり，エーテルの風はみつからず，地球の運動によっても方向による光速の差は出ないという結果になったのだ！

相対論が確立された現在，エーテルは仮説としての存在意義をも失い，光波の媒質は空間そのものであるとされ，慣性系においてはいずれもその相対速度にかかわらず光速は等しく c　$3.0 \times 10^8 \mathrm{m/s}$ であるとする光速不変の原理が，あたりまえの事実として受けいれられている。

（特殊）相対性理論は，現在では多くの実験・観測によって試されずみの次の 2 つの原理から出発する。すなわち，

(1)　相対性原理
(2)　光速不変の原理

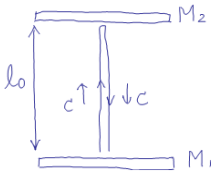


である。(2) は，(1) が光の進行という現象にも適用されるということだから，相対論は，相対性原理をとことんつきつめた結果引き出された帰結ということができる。このように出発した原理の単純さに比べて，相対論によって導出される内容はあまりにも豊かで驚きにあたいするものである。

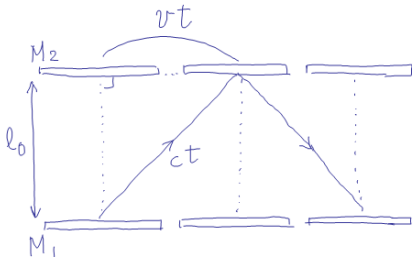
Scene 3　時間のおくれ

問題　光速不変の原理を認めれば，最高の信頼性をもって時間をはかる方法として「光時計」を考えることができる。実用的ではないものの，時間というものに対する見方に革命的な変革をもたらした相対論のエッセンスを理解するのによいアイテムである。

しくみはいたって簡単。一定の距離 l_0 だけ離した鏡 M_1，M_2 の間で光を往復させる。M_1，M_2 での反射が時を刻むというわけだ。この時計がたとえば右方向に速さ v で運動しているときにどう見えるかを考えよう。



この思考実験を考察する中で重大なパラドックスにつきあたるが，相対論によってそれが解決されるときに常識を超えた帰結がこぼれおちる。



光時計が静止していれば，もちろん往復時間（周期）は，

$$2t_0 = \frac{2l_0}{c}$$

だが，これが右に速さ v で動いていると，周期 $2t$ とおいて，

$$(ct)^2 = l_0^2 + (vt)^2$$

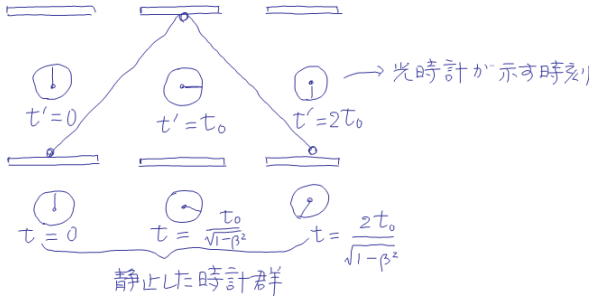
$$\therefore \quad 2t = \frac{2l_0}{c} \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c}$$

となって一見矛盾が生じる。でも私たちは，相対性原理と光速不変の原理のみを出発点として考えをすすめ，その結果の奇妙さはひとまず受容れてしまうべきなのだ。

$$t = t_0 \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_0 = t \times \sqrt{1-\beta^2} < t$$

という結果は，運動する時計の周期は長くなり，静止した時計に比べてどんどんおくれていくことを示している。

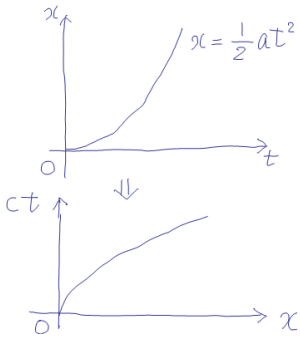
超高速リニアモーターカーがどんなスピードで走っていようと（ただし一定），乗っている君は慣性系にいるのだから，光時計は静止しているときと変わらぬ時を刻んでいるはずなのだった。ところが，駅のホームから通過する列車内の時計を見るとおくれているということだから，列車内に起こる現象のすべてがゆっくりと進むように見えると考えざるを得ない。そして，この奇妙な帰結こそが相対論の教える真実なのだ！　これを等速度系の「時間のおくれ」という。



練習問題 3　速度 v で動く光時計のおくれは直接には光速不変の原理の帰結である。「常識」的な（非相対論的な）考え方で光速が変化すると考えて，この光時計のすすみを考察してみよ（もちろん，その結論は相対性原理を破ることになる）。

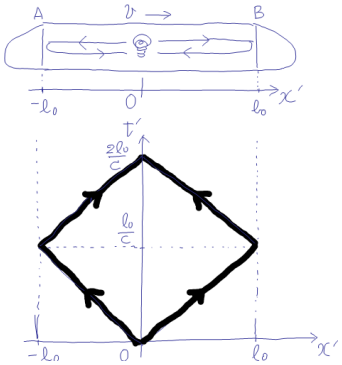
Scene 6　時空のダイヤグラム

列車のダイヤグラムというのがある。いわば運行予定表だが，時間とともに変化する複数の列車の位置がわかる。列車の走行を示す線が交差してダイヤの形◇がたくさんできるからそう呼ぶのかな？　これは，いわば $x-t$ グラフである。



たとえば，初速 0 で原点を出発した場合の等加速度運動の $x-t$ グラフは左のようになる。相対論では，一般に縦軸を時間軸にして左下のように描く。これを時空のダイヤグラムと呼ぶことに異論はないだろう。横軸は x 軸で代表させたが，本来 x，y，z 軸がくる（平面上にはひとつしか描けない）。しばしば，縦横の軸のスケールを「長さ」に統一するために，時間軸は光速 c をかけて表現することがある。

問題　リニアモーターカーの中央から発した光が A，B で反射してもどるまでの光のダイヤグラムを描いてみよう。



列車とともに動く系でのダイヤグラムは簡単だ。まさに，ダイヤの形そのままである。

地上から見た立場（静止系）ではどうなるだろう？

まず私たちは，列車の運動をダイヤグラムに表現しなければならない。「A，中央，B」とした斜めの直線がそれである。AB 間の x 方向の間隔は，

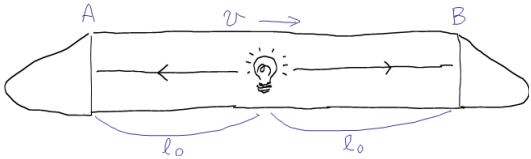
（固有長）に対して $\sqrt{1-\beta^2}$ の比で短縮して見えるということを示す，これまた非常識な結果がこぼれ出た。これをアインシュタイン以前に理論的に導出したローレンツにちなんで，ローレンツ短縮と呼ぶ。

上の考察でわかるように，ローレンツ短縮という帰結は時間のおくれと切り離せない関係にある。それらの間の深い関係は，次の Scene でより明らかにされるだろう。ちなみに，短縮は $\vec{v}$ の方向に起こるということを銘記しておこう。

時間のおくれとローレンツ短縮で，ひとまずつじつまが合ったように思えるが，実は，以上の考察にはさらに深刻なジレンマが残されている。それは，往路時間 t_1 と復路時間 t_2 が等しくないということである。光時計とともに動く系では，この時間は等しく l_0/c のはずだから，$t_1 > t_2$ という結論にはさらに何らかの説明がないと納得できないだろう。次の Scene の中心テーマがこれにあたる。

Scene 5　同時の相対性

問題　超高速リニアモーターカーが速度 $\vec{v}$ で走っている。中央から $t=0$ に前後に発した光が前端および後端に達する現象を考察しよう。



ともに動く立場で見れば A，B に達する時刻 t_{0A}，t_{0B} は

$$t_{0A} = t_{0B} = \frac{l_0}{c}$$

で，もちろん列車に乗った君はその到達を同時であると見る。

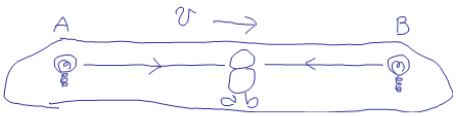
光時計の考察で計算ずみのように，これを地上の静止系から見ると

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{l}{c+v} = \frac{l_0}{c} \times \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \frac{l_0}{c} \times \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\ t_B &= \frac{l}{c-v} = \frac{l_0}{c} \times \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \frac{l_0}{c} \times \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad , \qquad \beta = \frac{v}{c} \end{aligned}$$

となる。ここで，ローレンツ短縮 $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$ を考慮した。

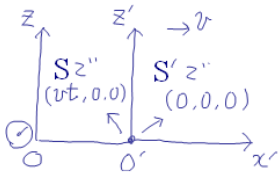
明らかに $t_A < t_B$ であるから A，B への光の到達は同時ではないことになる。2 つのできごとが同時であるかどうかということが見る系によって変わるということになるのだ！中央からの光の発射が同時であることは疑うべくもない。光源を点灯したという事象はそれ自体ひとつのことだから。大切なのは，A と B のように離れた 2 点でおこる 2 つの事象が同時であるかどうかは自明でなく，見る系によって慎重に判断すべきだということなのだ。では，次の場合はどうだろう？

練習問題 5　リニアモーターカーの中央に乗ったＴ氏は,「A，B から同時に発した光が中央に同時に到達した」と主張する。地上の静止系からこれを見た君の主張はどうあるべきだろうか？



さあ，時間のおくれ，ローレンツ短縮…ときてわかりかけた相対論だが，同時の相対性にいたってむしろ混迷を深めたのではないだろうか？　このジレンマを脱する道は，時間的な隔たりと空間的な隔たりを個別に考えるのでなく，統一的に考えるというところにある。

逆変換は，v が $-v$ におきかわるだけで，S と S′ は対等平等だから，



$$x = \gamma(x' + vt')$$

となるだろう。

一方，t' への変換は時間のおくれから

$$t' = \gamma t + \alpha x \qquad (\alpha \text{は } v \text{ のみの関数})$$

という形になると思われる。S の原点にくっついた時計を考えると，つねに $x = 0$ でこれを S′ から見ると γ の比でおくれているはずだから。また，これが x を含むのが相対論の特徴で，車内の時計群が場所によって異なる時刻をさして見えるということに見合う形だ。

さて，α を決めよう。$t = t' = 0$ で一致した原点から x 方向に発した光の到達点を考えると，S，S′ から見て $x = ct$，$x' = ct'$ となる。これが変換式を満たすべきだから，

$$\left.\begin{array}{lcr} x' = \gamma(x - vt) & \longrightarrow & ct' = \gamma(c - v)t \\ t' = \gamma t + \alpha x & \longrightarrow & t' = (\gamma + \alpha c)t \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \alpha = -\gamma\,\frac{\beta}{c}$$

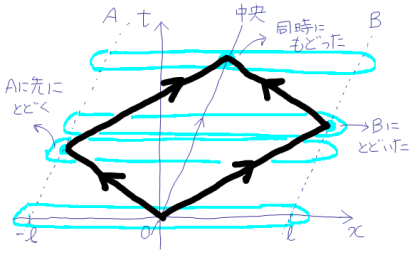
結局，求める変換は

$$\left\{\begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ \\ y' = y \\ z' = z \end{array}\right. \qquad \text{ただし} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c}$$

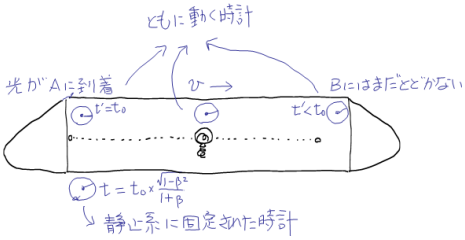
となる。対称性がわかってキレイな形にするため，あえて ct の形を用いた。相対性理論によるこの座標変換をローレンツ変換と呼ぶ。

$2l = 2l_0\sqrt{1-\beta^2}$ としてある。

光のダイヤグラムは，光速不変の原理によりどちらに向かうにも先ほどの「ともに動く系」のダイヤグラムと同じ傾き（$\pm 1/c$）をもってのびていく。それは斜めにゆがんだダイヤ形になった！　もちろん A，B への光の到達は同時ではない！



列車内ではこれが同時であることを考えると，外から私たちが見ている列車内は，その位置によって列車内の系（ともに動く系）における異なる時刻の状態を見ていることになるのだ !!



列車内にずらりとならんだ時計があるとすれば，私たちが外から見ると少しずつ異なる時刻をさしていることになるわけだ。どうして列車が短く見えるのか，ローレンツ短縮の謎も解けたのではないだろうか？

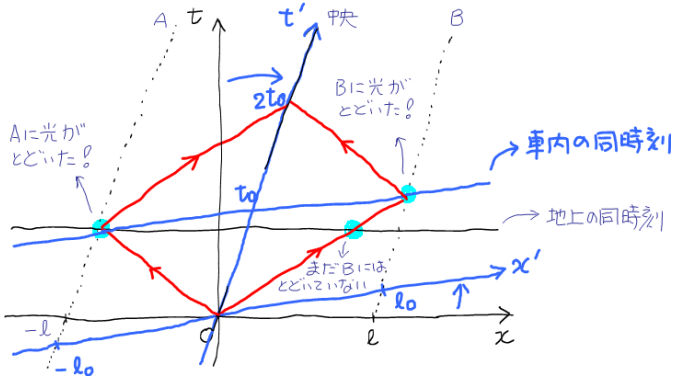
練習問題 6　上の図で，車内の A にある時計が時刻 t_0 をさしているならば，時間のおくれにより静止系の時刻 t との関係は，

$$t = t_0 \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となると思われるが，そうなってはいない。納得のいく説明を！

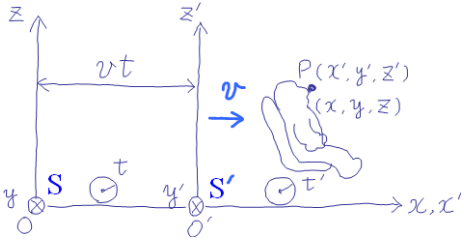
以上の状況を時空のダイヤグラム上で見てみよう。地上の同時刻は下図の x 軸に平行だが，車内の同時刻は図の x' 軸に平行になる。

同一平面内で車内の時間‐空間座標軸を表現すると，t'-x' のような「斜交軸」となる。この軸上で，t_0，l_0 は図のようになる。ただし，$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$ などの長さの比は，この図の上でそのまま表現されてはいないので注意したい（これは t 軸を ct 軸にすれば解決するというようなものではない）。



Scene 7　ローレンツ変換

地上に静止した座標系を S，x 方向に一定の速さ v で走っているリニアモーターカーの車内に固定された座標系を S′ としよう。



時刻 $t = t' = 0$ においてその原点 O と O′ が一致していたとして，

S の時空座標　(t, x, y, z)

S′ の時空座標　(t', x', y', z')

この両者を結ぶ変換は，相対性理論を考慮しなければ

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

となり，これをガリレイ変換という。

空間の等方性（特別の方向がなくいずれの方向も平等であること）から，相対性理論を考慮しても $y' = y$, $z' = z$ は変更を受けないが，t' と x' の式は修正される必要がある。

まずもって変換は 1 次式になるだろう。なぜなら，逆に解いたとき（逆変換）に変わるのは相対速度の向きだけでほとんど同じ形になるはずだから。

まず x' への変換は，ローレンツ短縮から

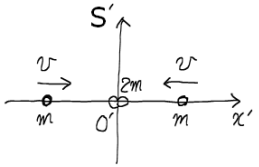
$$x' = \gamma(x - vt) \qquad \text{ただし} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c}$$

となりそうだ。S′ の原点 O′ にあてはめれば，$x' = 0$ に対して $x = vt$ となるべきこともこれを支持している。

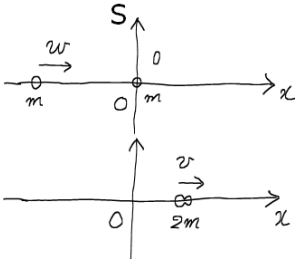
Scene 9　運動量と質量

問題

S′ 系において同じ質点が左右から同じ速さ v で近づいてきて衝突・合体した（完全非弾性衝突）。これを S 系で見てみよう。ただし，S′ 系の S 系に対する速度は x 方向に v とする。



衝突時に S，S′ の原点が一致するようにとる。S 系から見ると，右の質点は原点に静止していて，左からもう 1 つが近づいてくるように見える。その速度は v と v の合成だから，



$$w = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

となる。

合体後は S′ 系においては静止するのだから，S 系から見た速度は v だ。さて，運動量は？　質量を m とすると，

$$\text{（衝突前）}\qquad \frac{2mv}{1 + v^2/c^2} < 2mv \qquad \text{（衝突後）}$$

運動量が保存しない！　われわれは，運動の法則において根幹をなす運動量とその保存則を捨てなければならないのだろうか？　否!!

実は捨てるべきは，質量保存則なのだ。m と m が合体して $2m$ という「常識」をまた放棄しなければならない。ここには 2 つの解決すべき問題が含まれる。

(1)　質量が速さによって変わるのではないかということ

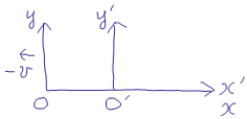
(2)　質量が衝突によって変わるのではないかということ

(1) は運動量と質量の関係に，そして (2) はエネルギーと質量の関係に変革をもたらす，相対論の 2 つめのヤマ場だ！

まずは運動量について考えてみよう。運動量は次によって定義されて

練習問題 7-1　ローレンツ変換の逆変換は，v を $-v$ ととりかえればよいから

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \end{cases}$$

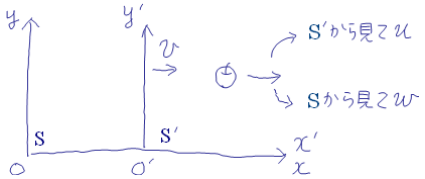


となるはずだが，直接の計算で確かめよ。

練習問題 7-2　時間のおくれおよびローレンツ短縮をローレンツ変換を使って導いてみよう。

Scene 8　速度の合成

問題　どの慣性系で見ても光速は一定というのだから，速度の合成が相対論以前のように単にベクトルの和にならないことは明らかだ。x 方向に速度 v をもつ S′ 系から見た速度が x' 方向に u である物体の，S 系から見た速度 w を求めよう。もちろん $w = u + v$ から修正を受けなければならないのだ。



S 系と S′ 系の原点が一致した時刻 $t = t' = 0$ に，物体が $x = x' = 0$ を通過したものとすると，S′ 系で時刻 t' における位置は，

$$x' = ut'$$

となる。この物体の座標について S 系にもどせば，

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') = \gamma(u + v)t' \\ t = \gamma(t' + \dfrac{v}{c^2}x') = \gamma(1 + \dfrac{uv}{c^2})t' \end{cases}$$

となるから，S 系から見た物体の速度は

$$w = \frac{x}{t} = \frac{u + v}{1 + \dfrac{uv}{c^2}}$$

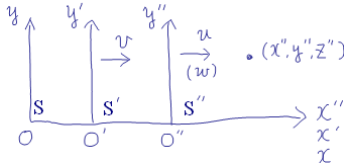
これが目的の合成速度だ！

光の場合は，$u = c$ を代入して

$$w = \frac{c + v}{1 + v/c} = c$$

となる。光速がすべての慣性系で c となり，また物体の速度が合成において決して c をこえられないことがわかる。

練習問題 8-1　S″ 系を S′ 系に対して x' 方向に速度 u をもつ第 3 の慣性系とするとき,



$$\mathrm{S} \underset{\beta = \frac{v}{c}}{\longrightarrow} \mathrm{S}' \underset{\beta' = \frac{u}{c}}{\longrightarrow} \mathrm{S}''$$

の 2 連続のローレンツ変換の結果が,

$$\mathrm{S} \underset{\beta'' = \frac{w}{c}}{\longrightarrow} \mathrm{S}''$$

のローレンツ変換に一致することを確かめよ。

練習問題 8-2　物体が x 方向に垂直な速度成分をもつときは，合成速度はどうなるか？

影響が，$M_0 = 2m(v)$ の形で引き継がれたことになる。明らかに運動エネルギーが質量に変わったように思われる!!

v が小さいとして質量の変化を近似してみよう。

$$
\begin{aligned}
\Delta M = M_0 - 2m_0 &= 2m(v) - 2m_0 \\
&= 2m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \\
& \quad 2m_0\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right) = 2 \times \frac{1}{2} m_0 v^2/c^2 \\
&= \Delta E/c^2
\end{aligned}
$$

まさに運動エネルギーの減少分が質量に変わったということを意味する結果が得られた。これをふまえて，さらに質量とエネルギーは等価であるという飛躍を許せば，

$$E = mc^2 \qquad \text{（エネルギーと質量の等価性）}$$

という有名な関係式にいたる。ここで m は，

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

であるから，

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \quad , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

そして $v \ll c$ のとき，

$$E \quad m_0 c^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = \underset{\text{静止エネルギー}}{m_0 c^2} + \underset{\text{運動エネルギー}}{\frac{1}{2} m_0 v^2}$$

となる。実際は，運動エネルギーの $\frac{1}{2} m_0 v^2$ こそが近似であり，正しくは $(E - m_0 c^2)$ である。

最後にエネルギーと運動量の関係を導いて終わりにしよう。

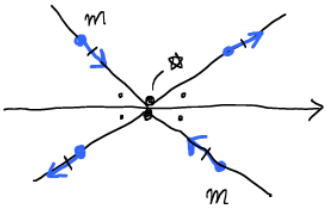
運動量は，　$\boldsymbol{p} = \dfrac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

いる。

$$\boldsymbol{p} = m(v)\boldsymbol{v}$$

ここで $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{v}$ はベクトル $\vec{p}$, $\vec{v}$ に同じ。$m(v)$ は $\boldsymbol{v}$ の大きさ v のある関数。これを質量と呼ぶこともある。この Scene の目標は，関数 $m(v)$ を知ることにある。

上の**問題**はエネルギーの問題を含んで難しいので，完全弾性衝突について考察する。



同じ質点が同じ速さで同一直線上を逆向きに運動して完全弾性衝突をすると，衝突後は衝突前と同じ速さでやはり同一直線上を離れ去っていく。これを図のように対称に見えるように軸をとろう。この軸の方向にある速度をもつ系から，この衝突を見る。

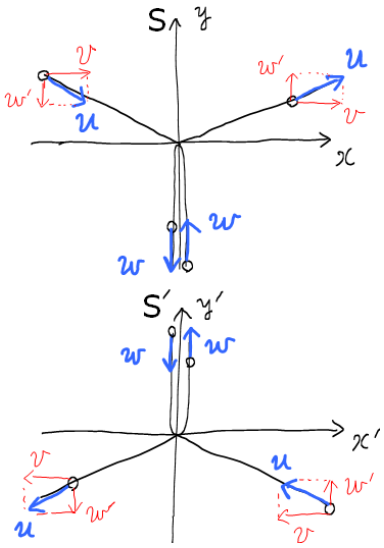
まず下からくる質点の速度の x 成分が 0 になるような S 系を選ぶ。このとき，2 質点の速度成分の大きさを図のようにおくと，y 方向の運動量保存によって，

$$m(u)w' = m(w)w$$

となる。

これを S′ 系から見ると運動の対称性から下の図のように逆転したものになるだろう。すると，w と w' の間の変換は Scene 8 の練習問題の結果を用いて，

$$w' = \frac{w}{\gamma} \quad , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



となる。よって，

$$\frac{m(u)}{m(w)} = \frac{w}{w'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ここで $w \to 0$ とすると，$u \to v$ となるから，

$$\frac{m(v)}{m(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

すなわち，

$$m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

となりそうだ。$m(v)$ は v の増加とともに増大することになるのだ！

練習問題 9　上式から，

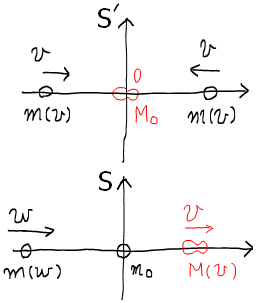
$$\frac{m(u)}{m(w)} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

を示せ。

$m(0)$ はいわゆる「静止質量」と呼ばれるものだ。以後は m_0 と書くことにしよう。

Scene 10　エネルギーと質量

問題　ふたたび Scene9 の**問題**にある完全非弾性衝突を考察しよう。



S′ 系において合体・静止後の質量を M_0 とする。もちろん，$M_0 = M(0)$ の意味だ。一方これを S 系で見たとき，運動量保存により

$$m(w)w = M(v)v$$

となるべきだ。すると，

$$\begin{aligned} M(v) &= \frac{w}{v} m(w) \\ &= \frac{2v}{v\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2v}{1+v^2/c^2}\right)^2/c^2}} \\ &= \frac{2m_0}{\sqrt{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)^2 - \dfrac{(2v)^2}{c^2}}} = \frac{2m_0}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

となる。しかし，

$$M(v) = \frac{M_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

なのだから，

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2m(v) \qquad !$$

M_0 が $2m_0$ でなく，それより大きい $2m(v)$ になったというところに重大な帰結がある。M_0 は静止質量だから，運動による質量の増大とは根本的にちがう。運動による質量変化は見る立場によって「そう見える」と解釈することもできるが，この場合は静止質量が $2m_0$ から M_0 に「正味」の増加をしたことになるのだ！

S′ 系で見ると，衝突後運動エネルギーが 0 になるが，衝突前の運動の

さて，変位 (dx, dy, dz) はそのままで 3 次元ベクトルだから，任意のベクトル $\boldsymbol{a}(a_x, a_y, a_z)$ も回転に対して同じ書きかえを受ける。

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad , \qquad a'_z = a_z$$

そして，その大きさ a は

$$a^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

であり，もちろん不変量なのだ。一般にベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は不変量となる。

練習問題 2　ベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ が座標系の回転に対して不変量であることを示せ。

II．時空とニセ「回転」

ローレンツ変換は，4 次元座標 (ct, x, y, z) の変換なのだった。

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad \text{ただし} \quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \dfrac{v}{c} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

ct', x' のみ取り出して行列で書けば，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

と書ける。これを双曲線関数を使って，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad , \qquad \begin{aligned} \cosh\alpha &= (e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2 \\ \sinh\alpha &= (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2 \end{aligned}$$

と書きかえることができ，3 次元空間の回転とよく似た形になる。

練習問題 3　上の α を求めよ。

これによって運動方程式は，　$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$

となる。質量も微分の中に入ることに注意!!

エネルギーは，　$E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

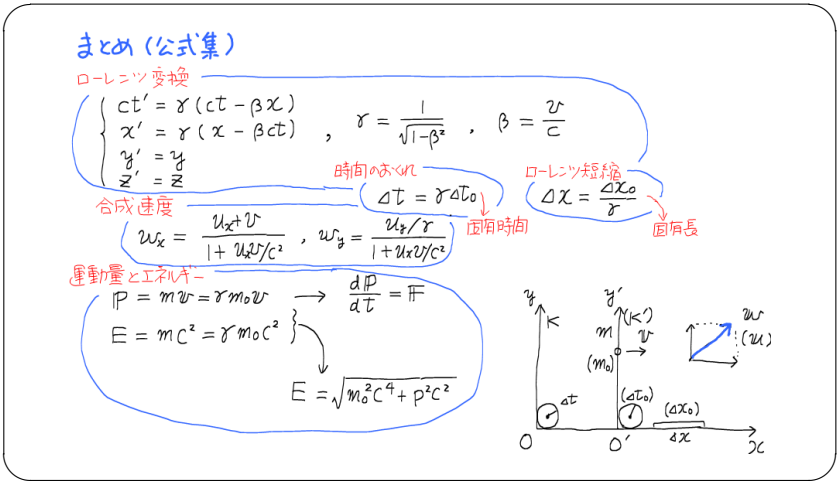
である。ニュートン力学では，E として運動エネルギーのみをとって，$E = \dfrac{p^2}{2m}$ であった。相対論では，上の 2 式より

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2 c^4$$

すなわち，

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

を得る。特に $m_0 = 0$ の場合，$E = pc$ を得るが，これは「光子」のエネルギーにあたる。



Scene X　時空の幾何学と 4 元ベクトル

この Scene は，特殊相対性理論の成果をよりエレガントなものにし，また一般相対性理論の土台ともなる時空の幾何学的なあつかいについて学ぶ。数学的にやや高度な内容になるので，Scene X として補講的にあつかうことにした。余力のある人はぜひ挑戦してみてほしい。

Δ と d について

Δx がある量 x の変化量を表すのに対して，dx はその微小な変化量を表す。Δx のかわりに dx を使うことにより，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

のように，微分計算を形式的に割り算におきかえることができて便利だ。この Scene では dx の形を多く用いる。

dx は $d \times x$ ではないので，$(dx)^2$ の意味で dx^2 とする。これは，$d(x^2)$ とは異なるから注意。また，$cdt = c \times dt$ はときに dct と書いてみることにした。この表記は一般的ではないが，$ct = c \times t$ を x, y, z と同等に扱うという意味を強調したひとつの試みである。$dct^2 = (cdt)^2$ とする。

I．3 次元空間と座標系の回転

われわれの空間は，3 次元であるといわれる。その意味は，たとえば直交座標 (x, y, z) の 3 つの値で空間内の 1 点を示すことができるということだ。そしてその空間の特徴として，座標の差が (dx, dy, dz) である 2 点間の距離 ds が，

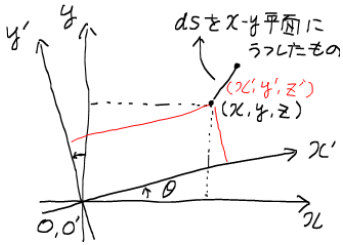
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ds を (dx, dy, dz) で表したこの形を空間の「計量」という。

で表され，この形が座標系の平行移動や回転によって変わらないという点があげられる（ds は Δ でいっこうにかまわないが，後のために d を使った）。

簡単のため z 軸まわりの回転を考えよう。回転角を θ とすると，点 (x, y, z) は回転後の座標 (x', y', z') に書きかえられる。

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$



x, y 座標のみについて行列で書くと，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。

変位 (dx, dy, dz) について同様に，

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

と書け，逆の変換は

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix}$$

逆行列または θ を $-\theta$ におきかえる！

である。

新しい座標での距離 ds' はもちろん，

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = ds^2$$

となるはずだ。空間の計量は，回転に対して形を変えず，距離 ds の値ももちろん変わらない。ds は回転という変換に対して不変量であるという。

練習問題 1　$ds'^2 = ds^2$ を直接計算で確かめよ。

4 元ベクトルの成分は，ローレンツ変換にしたがう。

$$\begin{pmatrix} a^{0\prime} \\ a^{1\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} \quad , \qquad a^{2\prime} = a^2 \quad , \qquad a^{3\prime} = a^3$$

変位 $d\boldsymbol{r}(dx, dy, dz)$ を成分とする 4 元変位ベクトル $(dct, d\boldsymbol{r})$ があるのなら，速度 $\boldsymbol{v}(v_x, v_y, v_z)$ を成分とする 4 元ベクトルはあるだろうか？

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dct} \times c$$

なのだから，時間成分を

$$v^0 = \frac{dct}{dct} \times c = c$$

とすればよさそうだが…残念！　速度の合成を考えてもわかることだが，時空変位の成分どうしの割り算がローレンツ変換にしたがわないのは明らかだし，何より上の $v^0 = c$ は定数であり，$(v^0)^2 - \boldsymbol{v}^2 = c^2 - v^2$ が不変量でないことも自明だ。

そこで dt で割ってマズイのだから，それ自身が不変量である固有時間 $d\tau$ で割ることを考える。すると 4 元速度ベクトルができあがる。

4 元速度　　→　不変量＝光速 c

$$\begin{aligned} u &= (c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}) \\ &= (\gamma c, \gamma \boldsymbol{v}) \end{aligned} \qquad (\gamma c)^2 - (\gamma \boldsymbol{v})^2 = c^2$$

ここで，

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma v_x \quad , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

を用いた。ただし，この場合の $\boldsymbol{v}$ や β，γ は，ローレンツ変換の中のそれとはちがうものだから注意（**練習問題 5** 参照）。

4 元速度ベクトルに静止質量 m_0 をかけたものはやはり 4 元ベクトルとなり，これを 4 元運動量という。空間成分はふつうに運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ に

ローレンツ変換は，4 次元時空の擬似的な回転と見ることができるのだ！ただし，あくまでニセの回転だから，3 次元空間の回転とはわけがちがう。

3 次元空間の　回転　に対する不変量＝距離　は，

4 次元時空の「回転」に対する不変量＝インタバル（時空距離，時空間隔）

におきかわる。

$$\underset{\text{（ローレンツ変換の不変量）}}{\text{インタバル}} \qquad ds^2 = dct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

時空上の変位 (dct, dx, dy, dz) のローレンツ変換はもちろん，

$$\begin{pmatrix} dct' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dct \\ dx \end{pmatrix} \quad , \qquad dy' = dy \quad , \qquad dz' = dz$$

である。

練習問題 4　$ds'^2 = ds^2$ となることを確かめよ。

インタバル ds は，$dct^2 > dx^2 + dy^2 + dz^2$ に対しては

$$\begin{aligned} ds = cd\tau &= cdt\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{c^2}} \\ &= cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

となるから，速さ v で動く系の固有時間 $d\tau$ に光速をかけたものである。このとき ds は時間的であるという。固有時間は，相対性原理から考えて座標系によって変わるはずのない量だから，ローレンツ変換において不変量となるわけだ。

ただ，インタバルは $ds^2 < 0$（ds は虚数！）の場合にも常に不変量になる。このときは空間的インタバルといい，

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dct^2 > 0$$

は変換によって $dct' = 0$ となる座標系に移ることにより，まさに 3 次元空間の距離の 2 乗になるのだ。

また ds は，光のダイヤグラムの上では常に 0 になり，光速不変の原理を意味する。つまり，$ds'^2 = ds^2 = 0$ から

$$c = \frac{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}{dt'} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

III．時空のダイヤグラム

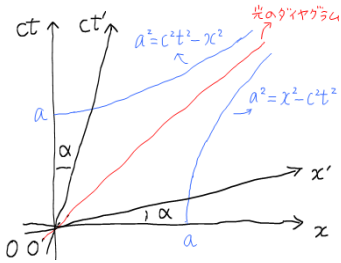
時空のダイヤグラムについて考察をしてみよう。

ローレンツ変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

を 3 次元の回転と対応づけると，角 α は

$$\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = \frac{\gamma\beta}{\gamma} = \beta$$



これは図で ct' 軸が ct 軸に対して，$\tan\alpha = \beta$ なる角 α だけ傾くことに対応する。

一方，x' 軸も x 軸に対して角 α だけ傾く。なぜならば，x' 軸上で

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = 0 \qquad \text{すなわち，} \qquad \frac{ct}{x} = \beta$$

となるから。空間の回転の場合とちがうのは，ct 軸と x 軸とで回転方向が逆な点だ。

時空ダイヤグラムでもうひとつ注意しなければならないのは，その「スケール」だ。空間の距離にあたるインタバル ds が，

$$ds^2 = dct^2 - d\boldsymbol{r}^2$$

となるから，ct-x 平面上において原点からの時間的インタバルが定数 a である点の軌跡は，

$$a^2 = ct^2 - x^2$$

一方，原点からの空間的インタバルが一定である点の軌跡は，

$$a^2 = x^2 - ct^2 \qquad (= -ds^2)$$

すなわち，円ではなく双曲線となるのだ。

原点から出る光のダイヤグラムは，原点が一致する時空座標系で常に ct 軸と x 軸のまん中を通り，その直線にそうどんなインタバルも 0 である。これは，光速で運動する時計は決して時を刻むことがないということだ！確かに固有時間は，

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0 \qquad (c^2 d\tau^2 = ds^2 \text{に注目！})$$

IV．4 元ベクトル

時空上の変位 (dct, dx, dy, dz) は，そのまま時空のベクトルと考えることができ，これを 4 元ベクトルという。$d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ は 3 次元空間のふつうのベクトルだ。

4 元変位	→ 不変量＝インタバル ds
(dct, dx, dy, dz)	$ds^2 = dct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$
$= (dct, d\boldsymbol{r})$	$= dct^2 - d\boldsymbol{r}^2$

一般の 4 元ベクトル (a^0, a^1, a^2, a^3) を考えることができる。ただし，ここで $(a^1, a^2, a^3) = (a_x, a_y, a_z)$ は，3 次元空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対応し，空間成分という。また，a^0 はその時間成分というべきものだ（座標の番号を右肩に書くことにはある意味があるのだが，とりあえず習慣と考えて！）。

4 元ベクトル	→ 不変量＝4 元ベクトルの「長さ」
(a^0, a^1, a^2, a^3)	$(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2$
$= (a^0, \boldsymbol{a})$	$= (a^0)^2 - \boldsymbol{a}^2$

練習問題 6　光子のエネルギーと運動量は,

$$E = pc = h\nu$$

と書ける。ただし，h はプランク定数，ν は振動数である。モメナジー $(E/c, \boldsymbol{p})$ は 4 元ベクトルだから，ローレンツ変換にしたがう。これらのことを用いて，光源が速さ v で遠ざかるときにおこるドップラー効果（赤方偏移）の式を導出せよ。

なる。

4 元運動量（モメナジー）　→　不変量＝静止エネルギー

$$\begin{aligned} p &= m_0 u \\ &= (m_0\gamma c, m_0\gamma \boldsymbol{v}) \\ &= (mc, m\boldsymbol{v}) \\ &= (E/c, \boldsymbol{p}) \end{aligned}$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = {m_0}^2 c^2 = \frac{{E_0}^2}{c^2}$$

すなわち

$$E = \sqrt{{m_0}^2 c^4 + \boldsymbol{p}^2 c^2}$$

時間成分は，物体のエネルギーを c で割ったものになる。

ここにエネルギーと運動量が 1 つの 4 元ベクトルの成分として統一された。

momentum + energy　→　momenergy

また，不変量の式から自動的にエネルギーと運動量の関係が出てくる！

練習問題 5　4 元速度のローレンツ変換から速度の合成則を求めよ。

V．運動方程式

ニュートンの運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

は，$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m_0\gamma\boldsymbol{v}$ と書きかえるだけでそのまま使えるのだった。これは，3 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{F}$ の因果関係を表すベクトル方程式になっている。3 次元空間ベクトルは座標系の平行移動や回転によって成分は変わるが，向きと大きさというベクトルの本質は変わらないから，運動方程式の形そのものは保たれる（運動方程式は空間の平行移動や回転に対して共変的であるという）。

ところが，さらにつっこんで考察をすすめると上の形は相対論の成果を十分とりいれたものになっていない。問題点は次の 2 つ。

(1)　ローレンツ変換によって形が保たれない。
(2)　4 元ベクトルの時間成分を含んでいない。

つまり，上の形はニュートンの方程式に相対論のメッキをかけたようなもので，あまりかっこよくない。われわれは中身もろともに相対論を浸透させたいのである。

(1) の解決は，4 元速度を引き出すときに用いた方法を使う。つまり dt でなく $d\tau$ で割るのだ。(2) は運動量を 4 元運動量に，力を 4 元力におきかえて解決する。すなわち，

$$\frac{dp}{d\tau} = f \quad , \qquad \begin{cases} p = (E/c, \boldsymbol{p}) \\ f = (\,?\,,\, \boldsymbol{?}\,) \end{cases}$$

という形にできれば，ローレンツ変換によって成分は変わっても形を変えることがない。

残るは，4 元力の中身と運動方程式の時間成分の意味づけだ。
$d\tau = dt/\gamma$ だから，空間成分については

$$\gamma \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \gamma \boldsymbol{F} \qquad \text{よって} \quad \boldsymbol{f} = \gamma \boldsymbol{F}$$

時間成分は，

$$\frac{\gamma}{c} \cdot \frac{dE}{dt} = f^0$$

となるが，dE は運動エネルギーの変化だから，外力がした仕事 $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ に等しく，

$$f^0 = \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \quad , \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

となる。4 元力の時間成分は仕事率に相当するわけだ。

まとめると次のようになる。

4 元運動方程式 $\quad \dfrac{dp}{d\tau} = f \quad \begin{cases} \text{時間成分} & \dfrac{1}{c}\dfrac{dE}{d\tau} = f^0 = \dfrac{\gamma}{c}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \\ & \text{（エネルギー原理）} \\ \text{空間成分} & \dfrac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{f} = \gamma\boldsymbol{F} \\ & \text{（運動方程式）} \end{cases}$

モメナジー $p = (E/c, \boldsymbol{p})$ の成分にしたがって，運動方程式の時間成分はいわゆるエネルギー原理すなわち非相対論的に書けば,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W \qquad \text{（運動エネルギーの変化＝外力からされた仕事）}$$

に当たる。これでローレンツ変換に対して共変的な運動方程式ができあがった。

最後に，4 元ベクトルの内積（スカラー積）についてふれておく。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

が空間回転に対して不変量であったように，4 元ベクトル a，b の内積を

$$a\cdot b = a^0 b^0 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

で定義すれば，これはローレンツ変換に対して不変量となる。たとえば，4 元力と 4 元速度の内積は

$$\begin{aligned} f\cdot u &= f^0 u^0 - \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} \\ &= \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\gamma c - \gamma\boldsymbol{F}\cdot\gamma\boldsymbol{v} = 0 \end{aligned}$$

となり，もちろんローレンツ変換に対して不変量になるわけだ。

8-1

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$$

とする。連続した変換を実行すると,

$$\begin{aligned} ct'' &= \gamma'(ct' - \beta' x') \\ &= \gamma'\{\gamma(ct - \beta x) - \gamma\beta'(x - \beta ct)\} \\ &= \gamma\gamma'\{(1+\beta\beta')ct - (\beta+\beta')x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma'(x' - \beta' ct') \\ &= \gamma'\{\gamma(x - \beta ct) - \gamma\beta'(ct - \beta x)\} \\ &= \gamma\gamma'\{(1+\beta\beta')x - (\beta+\beta')ct\} \end{aligned}$$

しかるに,

$$\begin{aligned} \gamma\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\beta'^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-(\beta^2+\beta'^2)+\beta^2\beta'^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+\beta\beta')^2-(\beta+\beta')^2}} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \gamma\gamma'(1+\beta\beta') &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{w^2}{c^2}}} \\ \gamma\gamma'(\beta+\beta') &= \frac{\dfrac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}\right)^2}} = \frac{\dfrac{w}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{w^2}{c^2}}} \\ &\left(\because \quad w = \frac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}} = \frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'} \times c\right) \end{aligned}$$

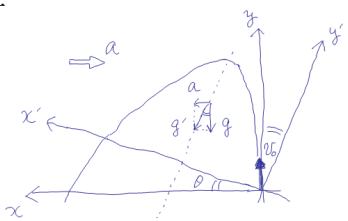
ここで,

$$\gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta''^2}}\,, \quad \beta'' = \frac{w}{c} \quad \text{とおけば,} \quad \begin{cases} ct'' = \gamma''(ct - \beta'' x) \\ x'' = \gamma''(x - \beta'' ct) \end{cases}$$

練習問題解答

1

加速度と逆方向に x 軸，鉛直上方に y 軸をとると，



$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}at^2 \\ y = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

2 式より t を消去すると軌跡の式は次のようになる。

$$y = v_0\sqrt{\frac{2x}{a}} - \frac{g}{a}x \qquad \text{or} \qquad \left(y + \frac{g}{a}x\right)^2 = \frac{2v_0^2}{a}x$$

座標軸を $\tan\theta = \dfrac{a}{g}$ なる角 θ だけ回転すると，座標変換

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

により，軌跡の式は

$$y' = x'\cot\theta - \frac{g'}{2v_0^2\sin^2\theta}x'^2$$

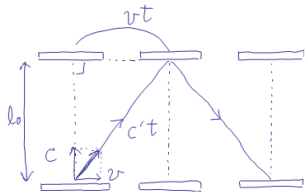
となるが，これは重力加速度が鉛直下方から角 θ の方向に

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2}$$

になったとしたときの斜方投射の軌跡にあたる。

3

光時計とともに動く系で光速が c であるものとすると，静止系から見た光速 c' は



$$c' = \sqrt{c^2 + v^2}$$

となり，

$$(c't)^2 = {l_0}^2 + (vt)^2$$

より

$$t = \frac{l_0}{\sqrt{c'^2 - v^2}} = \frac{l_0}{c} = t_0$$

$t > t_0$ という時間のおくれは，光速を不変とした副作用であることがわかる。上の考察とは逆に静止系での光速を c とすれば，光時計とともに動く系では $c'' = \sqrt{c^2 - v^2}$ となり，相対性原理の破たんは明らかである。

5

計算するまでもなく，静止系から見たときは A からの所要時間が B からの所要時間よりも長い。しかし,「中央に同時に達した」という T 氏の主張に変更は許されないことに注意しよう。同一の場所における同時性が見る系によって変わるということになると，原因が先にあって結果が後におこるという因果律を破ってしまうことになるだろう。同時性が相対的であるのはあくまで離れた別の場所でのできごとについてである。

すなわち，君の正しい主張はこうだ。

「A が先に点灯した後，B が点灯した。結果的に中央には，同時に光が到達したのだ。」

6

$t' = t = 0$（光の出発）において時刻 0 をさしていたのは，車内では中央にある時計だけだったのだ。A の時計はいくらかすすみ，B の時計はいくらかおくれた時刻をさしている。与式が成立するのは中央の時計だけである。

7-1

行列を使ってイッキにいこう。変換は，

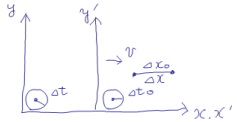
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

だから，逆変換は

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

7-2

x 方向に速度 v をもつ S′ 系の原点における経過時間を，S 系の時計で測ることを考える。

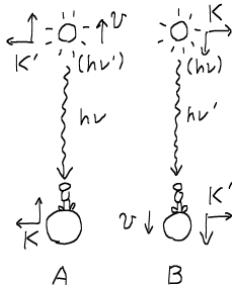


$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2{}' + \frac{v x_2{}'}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1{}' + \frac{v x_1{}'}{c^2}\right) \\ &= \gamma(t_2{}' - t_1{}') \qquad (\because \quad x_1{}' = x_2{}' = 0) \\ &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{※観測される側の同位置がポイント！} \end{aligned}$$

一方，S′ 系で $x_1{}'$，$x_2{}'$ の固定した両端をもつ線分の長さを，S 系において時刻 t に測定することを考える。

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &= x_2{}' - x_1{}' = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) \\ &= \gamma(x_2 - x_1) \qquad (\because \quad t_1 = t_2 = t) \\ &= \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{※観測する側の同時刻がポイント！} \end{aligned}$$

X-6



図の A，B どちらで考えても同じだが，A の場合 $\boldsymbol{p}$ の向きに注意！　ここでは B で考えよう。

モメナジーの変換は，

$$\begin{cases} E'/c = \gamma(E/c - \beta p) \\ p' = \gamma(p - \beta E/c) \end{cases}$$

だが，$E = pc$ によりこれらは同じく，

$$E' = \gamma(1-\beta)E$$

となる。$E = h\nu$ を代入して，

$$h\nu' = \gamma(1-\beta)h\nu$$

ゆえに，

$$\nu' = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\cdot\nu = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\cdot\nu$$

$v \ll c$ の場合，β の 1 次まで近似をとると

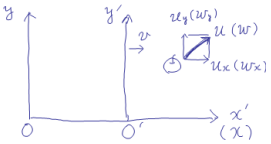
$$\nu' \quad (1-\beta)\nu = \frac{c-v}{c}\cdot\nu$$

となり，音波と同じ結果を得る。

8-2

速度の x 成分の変換は,

$$w_x = \frac{u_x + v}{1 + \dfrac{u_x v}{c^2}}$$



となることはすぐにわかる。

S′ 系において y' 方向の速度成分 u_y をもつとき，S 系から見た y 成分 w_y を求める。簡単のため，これまでと同様に $t = t' = 0$ において，原点 O，O′ を通過したとすると,

$$\begin{cases} y = y' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

だから,

$$\begin{aligned} w_y = \frac{y}{t} &= \frac{y'}{\gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right)} \\ &= \frac{\dfrac{y'}{t'}}{\gamma\left(1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{x'}{t'}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{u_x v}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

9

$$v^2 + w'^2 = u^2$$

$$\therefore \quad v^2 + w^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = u^2$$

したがって,

$$\frac{m(u)}{m(w)} = \frac{\sqrt{1 - w^2/c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\sqrt{c^2 - w^2}}{\sqrt{c^2 - v^2 - w^2(c^2 - v^2)/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

X-1

$$
\begin{aligned}
ds'^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \\
&= (dx\cos\theta + dy\sin\theta)^2 + (-dx\sin\theta + dy\cos\theta)^2 + dz^2 \\
&= dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2
\end{aligned}
$$

X-2

$$
(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = a^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + b^2
$$

ここで，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$，$a^2$，$b^2$ は不変量だから，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は不変量のはずである。

X-3

$$
\cosh\alpha + \sinh\alpha = e^{\alpha} = \gamma(1+\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}
$$

したがって，

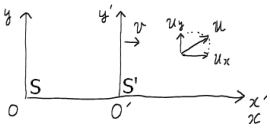
$$
\alpha = \log\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}
$$

X-4

$$
\begin{aligned}
ds'^2 &= dct'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\
&= \gamma^2(dct - \beta dx)^2 - \gamma^2(dx - \beta dct)^2 - dy^2 - dz^2 \\
&= \gamma^2(1-\beta^2)(dct^2 - dx^2) - dy^2 - dz^2 \\
&= dct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2
\end{aligned}
$$

X-5

S′ 系における速度 $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, 0)$ が S 系から見てどうなるかを考える。S′ 系における 4 元速度は,



$$u' = (\gamma_u c, \gamma_u \boldsymbol{u}) \quad , \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

である。これを S 系から見たとき,

$$u = (\gamma_w c, \gamma_w \boldsymbol{w}) \quad , \quad \gamma_w = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}$$

となるとしよう。ローレンツ変換（S′ → S）により,

$$\begin{cases} \gamma_w c = \gamma(\gamma_u c + \beta\gamma_u u_x) = \gamma\gamma_u(c + v u_x/c) \\ \gamma_w w_x = \gamma(\gamma_u u_x + \beta\gamma_u c) = \gamma\gamma_u(u_x + v) \\ \gamma_w w_y = \gamma_u u_y \quad , \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = v/c \end{cases}$$

第 1 式より,

$$\gamma_w = \gamma\gamma_u \left(1 + \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

ゆえに第 2 式より,

$$w_x = \frac{\gamma\gamma_u}{\gamma_w}(u_x + v) = \frac{u_x + v}{1 + \dfrac{u_x v}{c^2}}$$

第 3 式より,

$$w_y = \frac{\gamma_u}{\gamma_w} u_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{u_x v}{c^2}\right)}$$

なお, z 成分がある場合も y 成分と同じ形になる。